

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL PPGE

JANO D`ARAUJO COELHO

CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO NO
ESTADO LIMITE DE SERVIÇO

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio

Florianópolis
2011

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

C672c Coelho, Jano D`Araujo

Confiabilidade de vigas de concreto armado no estado limite de serviço [tese] / Jano D`Araújo Coelho; orientador; Daniel Domingues Loriggio. - Florianópolis, SC, 2011.
272 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia civil. 2. Análise probabilística. 3. Vigas de concreto. 4. Monte Carlo, simulação de. I. Loriggio, Daniel Domingues. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDU 624

JANO D`ARAÚJO COELHO

**CONFIABILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO NO
ESTADO LIMITE DE SERVIÇO**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Florianópolis, 19 de setembro de 2011

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, PhD
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr.
Orientador, UFSC

Prof.^a Henriette Lebre La Rovere, PhD UFSC

Prof. André Teófilo Beck, PhD USP

Prof. Narbal Ataliba Marcellino, Dr. UFSC

Prof. Américo Campos Filho, Dr. UFRGS

Dedico este trabalho a meu pai, in memoriam, à minha mãe, aos meus filhos, Carolina, Rafael e Moacyr e em especial à minha esposa Andréa pelo incentivo e amor incommensuráveis.

AGRADECIMENTOS

A Deus, sempre em primeiro lugar.

Aos meus pais, por terem feito tudo ao seu alcance para que eu pudesse atingir os meus objetivos.

Em especial, à minha esposa Andréa, pelo amor, pela paciência, dedicação e apoio.

Ao Prof. Daniel Domingues Loriggio, pela tranquilidade, dedicação e incentivo durante todo o curso de pós-graduação e em todas as etapas de desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores André Teófilo Beck e Edison da Rosa pelos conhecimentos transmitidos e pelo estímulo.

À Prof.^a Henriette Lebre La Rovere pela importante participação no início e ao longo de toda esta longa jornada.

Ao Prof. Narbal Ataliba Marcellino pelos conhecimentos transmitidos e pelas importantes contribuições como membro da banca de avaliação.

Ao Prof. Américo Campos Filho pelas importantes contribuições como membro da banca de avaliação.

Aos professores do curso de graduação e pós-graduação do Departamento de Engenharia Civil e do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, que contribuíram para a minha formação.

À secretaria de Pós-Graduação de Engenharia Civil da UFSC, pelo constante auxílio.

Aos amigos e parentes que apoiaram e incentivaram em todos os momentos.

RESUMO

A variabilidade nos valores das flechas de vigas de concreto armado pode ser atribuída a incertezas nas propriedades dos materiais, nas dimensões dos elementos e na história do carregamento. Outras fontes de incertezas são os erros de modelos nos procedimentos de cálculo, as condições de contorno, o desenvolvimento de fissuras devidas à retração e a variação de temperatura e incertezas em relação ao tempo de aplicação das cargas devidas à construção e instalação de elementos não estruturais.

Um modelo determinístico é usado para calcular as flechas imediatas e diferidas das vigas de concreto armado. O modelo utiliza uma teoria consistente para a análise da curvatura e deslocamentos das vigas de concreto armado em estado de fissuração. Nesse modelo é considerada a contribuição do concreto entre as fissuras, efeito também conhecido como *tension-stiffening*. Os resultados do procedimento determinístico são verificados com os resultados de ensaios de flechas em vigas disponíveis nos trabalhos da área em estudo.

Uma simulação pelo Método de Monte Carlo é utilizada para calcular probabilidades de falha em serviço e a variabilidade das flechas em uma série de vigas dimensionadas de acordo com a norma brasileira. Um estudo paramétrico é feito para determinar a influência de cada uma das variáveis aleatórias de projeto nesta variabilidade.

Os resultados analisados demonstram que a variabilidade dos valores das flechas pode ser grande e depende basicamente da relação entre o momento aplicado e o momento de fissuração, da taxa de armadura e também da relação entre a carga acidental aplicada e a carga permanente. Foi verificado que este procedimento de dimensionamento da norma brasileira produz índices de confiabilidade não uniformes.

Palavras-chave: análise probabilística; flechas; vigas de concreto armado; simulação pelo Método de Monte Carlo.

ABSTRACT

The variability of reinforced concrete beams deflections can be attributed to uncertainties in the material properties, the dimensions of the elements, the reinforcement and the applied loads. Other sources of uncertainties are the errors of the model used in the calculation procedures, the boundary conditions and the development of cracks due to shrinkage and temperature changes and uncertainty regarding the time of application of loads during construction and installation of non-structural elements.

A deterministic model is employed in order to calculate the immediate and time-dependent deflections using a finite element approach. The model uses a consistent theory for the analysis of curvature and deflections of reinforced concrete beams in the cracking stage. The model considers the contribution of concrete between cracks, effect known as tension stiffening. The results of the deterministic model are compared with the test data in the literature.

A simulation procedure using the Monte Carlo method is used to evaluate the variability of deflections and probabilities of serviceability failure for reinforced concrete beams and slabs sized according to brazilian code. A parametric study is carried out in order to determine the influence of each one of the random design variables on this variability.

The results demonstrate that the variability of the deflection values can be large and is basically dependent on the relation between the applied moment and the cracking moment, the reinforcement ratio and also in the slenderness ratio of the beam or slab. It was found that the serviceability requirements of the code produce non-uniform reliability indexes.

Keywords: Deflections; Monte Carlo simulation; Probabilistic analysis; Reinforced concrete; Reliability; Serviceability; Tension stiffening.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - COMPARATIVO ENTRE DESLOCAMENTOS CALCULADOS E MEDIDOS EM CAMPO. FONTE: ADAPTADO DE STEPHEN E SCANLON (1986).	31
FIGURA 2 – FLECHA INICIAL (IMEDIATA) PARA CARREGAMENTOS QUASE PERMANENTES POR DIFERENTES MÉTODOS (ARAUJO, 2004).	45
FIGURA 3 - DIAGRAMA DE RESPOSTA CARGA-FLECHA DE UMA VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO.	48
FIGURA 4 – ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO FISSURADO SUBMETIDO À FLEXÃO. FONTE: ADAPTADO DE LLINÁS (2001).	49
FIGURA 5 - DIAGRAMA MOMENTO FLETOR – CURVATURA.	49
FIGURA 6 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À COMPRESSÃO, PARA $B_c =$ 2.	53
FIGURA 7 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À COMPRESSÃO, PARA VALORES DE B_c VARIANDO DE 1,5 A 4.	54
FIGURA 8 - RESPOSTA DE UMA BARRA DE CONCRETO TRACIONADA. FONTE: ADAPTADO DE BISCHOFF (2005).	56
FIGURA 9 - MODELO DE FISSURAS DISTRIBUÍDAS E DE FISSURAS DISCRETAS.	57
FIGURA 10 - DIAGRAMA DE RESPOSTA CARGA-FLECHA COM MODIFICAÇÃO NA LEI CONSTITUTIVA DO CONCRETO TRACIONADO. FONTE: ADAPTADO DE FIELDS E BISCHOFF, (2004).	58
FIGURA 11 - MODIFICAÇÃO DA LEI CONSTITUTIVA DO CONCRETO TRACIONADO. FONTE: ADAPTADO DE LLINÁS, 2001).	59
FIGURA 12 - ENSAIOS DE TRAÇÃO DIRETA EM ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO. FONTE: ADAPTADO DE PRAKHYA E MORLEY (1990).	61
FIGURA 13 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À TRAÇÃO, PARA VALORES DE B_t VARIANDO DE 1,5 A 4.	63
FIGURA 14 - RELAÇÃO ENTRE B_t E A TAXA DE ARMADURA ρ PARA UM VALOR DE $s = 2$ CM E COBRIMENTOS DE CONCRETO DE 1 A 4 CM.	63
FIGURA 15 - RELAÇÃO ENTRE B_t E A TAXA DE ARMADURA ρ PARA UM VALOR DE COBRIMENTO DE 2 CM E ESPAÇAMENTO ENTRE BARRAS s DE 2 A 5 CM.	64
FIGURA 16 - RELAÇÃO ENTRE B_t E O COBRIMENTO DA ARMADURA c PARA VALORES CONSTANTES DE TAXA DE ARMADURA ρ E O ESPAÇAMENTO ENTRE BARRAS s DE 2 CM.	64
FIGURA 17 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À COMPRESSÃO E A TRAÇÃO.	65
FIGURA 18 – VIGAS VT1 E VT2 - BEBER (1999) E MODELO IMPLEMENTADO CALCULADO COM DIVERSOS VALORES DE B_t CONSTANTES E COM B_t CALCULADO PELA Eq.(18).	66

FIGURA 19 - CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O AÇO DA ARMADURA: (A) AÇO DE DUREZA NATURAL (CA-50); (B) AÇO ENCRUADO A FRIO (CA60). FONTE: ADAPTADO DE CHONG (2004).....	68
FIGURA 20 - MODELO DE DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO AÇO. FONTE: ADAPTADO DE ESMAEILY E XIAO (2005).	69
FIGURA 21 - DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O AÇO CA-50.	70
FIGURA 22 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NA SEÇÃO TRANSVERSAL DAS VIGAS	71
FIGURA 23 - RELAÇÃO MOMENTO FLETOR X CURVATURA.	75
FIGURA 24 - VARIAÇÃO DA POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA NO DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA.	76
FIGURA 25 - FLUÊNCIA DO CONCRETO SUBMETIDO À TENSÃO CONSTANTE. (GHALI E FAVRE, 1994).	78
FIGURA 26 – RETRAÇÃO DO CONCRETO	85
FIGURA 27 - CARREGAMENTO SIMPLIFICADO E DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES.	86
FIGURA 28 - VIGA SUBMETIDA A CARGAS TRANSVERSAIS.	92
FIGURA 29 – MODELO DE BERNOULLI-EULER DE UMA VIGA PLANA.	93
FIGURA 30 – CONVENÇÃO POSITIVA DE SINAIS PARA M E V	94
FIGURA 31 - ELEMENTO DE VIGA PLANA BERNOULLI - EULER DE 2 NÓS E 4 GRAUS DE LIBERDADE.	97
FIGURA 32 – (A) DEFORMAÇÃO CÚBICA DE ELEMENTOS, C^1 ; (B) DEFORMAÇÃO LINEAR DE ELEMENTOS, C^0 . A INTERPOLAÇÃO TIPO C^0 MANTÉM SOMENTE A CONTINUIDADE.	98
FIGURA 33 – FUNÇÕES DE FORMA CÚBICA DE UM ELEMENTO DE VIGA PLANO.	99
FIGURA 34 – INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DA RIGIDEZ SECANTE.	107
FIGURA 35- DETALHE TÍPICO DA VIGA EXPERIMENTAL DE CONTROLE (BUCKHOUSE, 1997).	110
FIGURA 36 - CURVA CARGA – DESLOCAMENTO PARA A VIGA C1. (ADAPTADO DE BUCKHOUSE, 1997).....	111
FIGURA 37 - RESULTADO COMPARATIVO ENTRE O MODELO IMPLEMENTADO E O ENSAIO DE BUCKHOUSE (1997), VIGA C1. B_T VARIÁVEL DE 1,84 A 1,81.	112
FIGURA 38 - DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA DA SEÇÃO DE CONCRETO DA VIGA C1, (BUCKHOUSE, 1997).	112
FIGURA 39 - VIGAS EXPERIMENTAIS VT1 E VT2, ENSAIADAS POR BEBER (1999).	113
FIGURA 40 – RESULTADO COMPARATIVO ENTRE O MODELO IMPLEMENTADO E OS ENSAIOS DE BEBER (1999), VIGAS VT1 E VT2. B_T VARIA DE 2,09 A 2,06.	115
FIGURA 41 - VIGA EXPERIMENTAL VB4, ENSAIADA POR JUVANDES (1999).	116
FIGURA 42 - RESULTADO COMPARATIVO ENTRE O MODELO IMPLEMENTADO E OS ENSAIOS DE JUVANDES (1999), VIGA VB4. B_T VARIA DE 2,62 A 2,58.	117
FIGURA 43 - RESULTADO COMPARATIVO ENTRE O MODELO IMPLEMENTADO E OS ENSAIOS DE ÁLVARES (1993), VIGAS V1 E V2. B_T VARIA DE 2,07 A 2,11.....	119

FIGURA 44 – CARACTERÍSTICAS DAS VIGAS DO <i>BENCHMARK</i> PROPOSTO PELO RILEM. .	120
FIGURA 45 – VIGA DIMENSIONADA DE ACORDO COM A NBR 6118(2007).	122
FIGURA 46 - DIAGRAMA CARGA – DESLOCAMENTO MODELO IMPLEMENTADO E BRANSON - NBR 6118 (2007). COEFICIENTE B_T VARIANDO DE 1,89 A 1,92.	124
FIGURA 47 - DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO, MODELO IMPLEMENTADO E BRANSON - NBR 6118 (2007). FLECHAS IMEDIATAS, RETRAÇÃO E FLECHAS TOTAIS (50 ANOS).	125
FIGURA 48 - DEFINIÇÃO DO DOMÍNIO DE FALHA.	129
FIGURA 49 – PROBLEMA BÁSICO DE CONFIABILIDADE $R-S$	130
FIGURA 50 – DISTRIBUIÇÃO DA MARGEM DE SEGURANÇA $Z = R - S$. FONTE: ADAPTADO DE MELCHER (2002).	131
FIGURA 51 – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE DE HASOFER-LIND.	132
FIGURA 52 - RELAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE CONFIABILIDADE, B , E A PROBABILIDADE DE FALHA P_F	133
FIGURA 53 – CORRELAÇÃO ENTRE A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO MÉDIA DO CONCRETO E A RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO F_{ck}	148
FIGURA 54 – CORRELAÇÃO ENTRE O MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO E A RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO F_{ck}	149
FIGURA 55 – DISTRIBUIÇÕES DE MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO CALCULADAS EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO F_{ck}	150
FIGURA 56 – CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO A . FONTE: ADAPTADO DE BASIS OF STRUCTURAL DESIGN (2004).	152
FIGURA 57 – DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE CARGAS ACIDENTAIS EM PISOS DE EDIFÍCIOS. (ADAPTADO DE MELCHER (2001)).	155
FIGURA 58 – HISTÓRIA DE CARREGAMENTO DE CARGAS ACIDENTAIS QUASE PERMANENTES (SUSTENTADAS).	156
FIGURA 59 - SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE MONTE CARLO.	159
FIGURA 60 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO. FONTE: ADAPTADO DE KOTTEGODA E ROSSO (1998).	161
FIGURA 61 - RESULTADOS DE PROBABILIDADE DE FALHA EM FUNÇÃO DO TAMANHO DA AMOSTRAS DAS SIMULAÇÕES.	163
FIGURA 62 - GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS COM AUTÔMATO CELULAR, REGRA 30.	166
FIGURA 63 - TESTE DE UNIFORMIDADE DO GERADOR $LGCm, a, b, x_0$	167
FIGURA 64 - ESPAÇO $([0,1]^2)$ DIVIDIDO EM PARTES IGUAIS.	167
FIGURA 65 - TESTE DE UNIFORMIDADE DO GERADOR PROPOSTO POR LEHMER (1949) COM 10000 VALORES. $LGC(108 + 1,23, 0,47594118)$	168
FIGURA 66 - TESTE DE UNIFORMIDADE DO GERADOR PROPOSTO POR LEHMER (1949) E DA FUNÇÃO <i>RANDOMREAL</i> DO <i>MATHEMATICA</i> PARA UM CONJUNTO DE 50000 VALORES.	169

FIGURA 67 - TESTE DE UNIFORMIDADE DO GERADOR DA FUNÇÃO <i>RANDOMREAL</i>	169
FIGURA 68 - TESTE DE UNIFORMIDADE DO GERADOR DA FUNÇÃO <i>RANDOMREAL</i> DO <i>MATHEMATICA</i> EM $([0,1]^3)$, PARA UM CONJUNTO DE 10000 VALORES.....	170
FIGURA 69—GERAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS POR TRANSFORMAÇÃO INVERSA.	171
FIGURA 70 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DO VÃO DA VIGA VR2050S6, PDF-DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	173
FIGURA 71 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA UMIDADE RELATIVA DO AMBIENTE PARA A VIGA VR2050S6, PDF - DISTRIBUIÇÃO NORMAL TRUNCADA.	173
FIGURA 72 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA LARGURA DA VIGA VR2050S6, PDF- DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	174
FIGURA 73 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA ALTURA DA VIGA VR2050S6, PDF-DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	174
FIGURA 74 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA ARMADURA INFERIOR DA VIGA VR2050S6, PDF DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	175
FIGURA 75 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA POSIÇÃO DA ARMADURA INFERIOR DA VIGA VR2050S6, PDF DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	175
FIGURA 76 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO MÉDIA DO CONCRETO (F_{cm}) DA VIGA VR2050S61, PDF DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	176
FIGURA 77 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO MÉDIA DO CONCRETO (F_{ctrM}) DA VIGA VR2050S6, PDF DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	176
FIGURA 78 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE INICIAL DO CONCRETO (E_{ci}) DA VIGA VR2050S6, PDF DISTRIBUIÇÃO NORMAL.	177
FIGURA 79 - HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DA AMOSTRA DA CARGA ACIDENTAL (Q) DA VIGA VR2050S6, PDF- DISTRIBUIÇÃO GAMMA.....	177
FIGURA 80 - FLUXOGRAMA GERAL DA SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE MONTE CARLO ..	181
FIGURA 81 - DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO, COM O MODELO IMPLEMENTADO PARA O ENSAIO DE BUCKHOUSE (1997), VIGA C1. B_T VARIA DE 1,84 A 1,81.	184
FIGURA 82 - HISTOGRAMA PARA OS DESLOCAMENTOS IMEDIATOS DA VIGA EXPERIMENTAL C1 DE BUCKHOUSE (1997).	185
FIGURA 83 - Q - Q PLOT DE UMA DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DE DADOS E A DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO.	186
FIGURA 84 - GRÁFICO Q - Q , DESLOCAMENTOS IMEDIATOS E DISTRIBUIÇÃO NORMAL DA VIGA C1, BUCKHOUSE (1997).	187
FIGURA 85 - HISTOGRAMA PARA OS DESLOCAMENTOS IMEDIATOS UMA PDF NORMAL, VIGA C1, BUCKHOUSE (1997).	187

FIGURA 86 - DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO, COM O MODELO IMPLEMENTADO PARA O ENSAIO DE BEBER (1999).	188
FIGURA 87 - DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO, COM O MODELO IMPLEMENTADO PARA O ENSAIO DE BEBER (1999). CARGA DE SERVIÇO $P_s = 6 \text{ kN}$	189
FIGURA 88 - HISTOGRAMA PARA OS DESLOCAMENTOS IMEDIATOS DA VIGA EXPERIMENTAL C1, BEBER (1999). CARGA DE SERVIÇO $P = 6 \text{ kN}$	190
FIGURA 89 - HISTOGRAMA PARA OS DESLOCAMENTOS IMEDIATOS DA VIGA EXPERIMENTAL C1, BEBER (1999). CARGA DE SERVIÇO $P = 12 \text{ kN}$	190
FIGURA 90 - FORMA DO PAVIMENTO COM A VIGA ISOSTÁTICA BIAPOIADA VR.	192
FIGURA 91 - FORMA DO PAVIMENTO COM A LAJE ISOSTÁTICA UNIDIRECIONAL E BIAPOIADA LR.	192
FIGURA 92 - FORMA DO PAVIMENTO COM A VIGA ISOSTÁTICA VR.	193
FIGURA 93 - CARREGAMENTO DE LONGA DURAÇÃO ADOTADO.	194
FIGURA 94 – CARACTERÍSTICAS DAS VIGAS VR DIMENSIONADAS DE ACORDO COM A NBR 6118(2007).....	195
FIGURA 95 - CARACTERÍSTICAS DAS LAJES LR DIMENSIONADAS DE ACORDO COM A NBR 6118(2007).....	195
FIGURA 96 - EFEITO DA ESBELTEZ (VÃO/ALTURA) NO COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (COV), PARA FLECHAS IMEDIATAS.	204
FIGURA 97 - EFEITO DA ESBELTEZ (VÃO/ALTURA) NO COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (COV), PARA FLECHAS TOTAIS.	204
FIGURA 98 - EFEITO DA RELAÇÃO M_f/M_R NO COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (COV) PARA FLECHAS IMEDIATAS E TOTAIS, PARA VIGAS.	205
FIGURA 99 - EFEITO DA RELAÇÃO M_f/M_R NO COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (COV) PARA FLECHAS IMEDIATAS.....	205
FIGURA 100 - EFEITO DA TAXA DE ARMADURA NO COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (COV) PARA FLECHAS IMEDIATA E TOTAL, PARA VIGAS E LAJES.	206
FIGURA 101 - EFEITO DA CONSISTÊNCIA DO CONCRETO NA VARIABILIDADE DOS DESLOCAMENTOS, PARA UMIDADES RELATIVAS $U_R = 40\%$ E $U_R = 80\%$	210
FIGURA 102 – VIGA VR2040S6 DIMENSIONADA DE ACORDO COM A NBR 6118 (2007)	211
FIGURA 103 - DIAGRAMA CARGA–DESLOCAMENTO, RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA UMA AMOSTRA DE 1000 VALORES DA LR10025S5.	213
FIGURA 104 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS IMEDIATAS DA LAJE LR10025S5.....	213
FIGURA 105 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS DA LR10025S5.	214
FIGURA 106 – HISTOGRAMA DAS FLECHAS IMEDIATAS, E COM UMA PDF NORMAL PARA A LAJE LR10025S5.	215
FIGURA 107 - GRÁFICOS $Q - Q$, DESLOCAMENTOS DE LONGA DURAÇÃO, PARA DISTRIBUIÇÃO NORMAL E PARA LOGNORMAL DA LR10025S5.	215

FIGURA 108 – HISTOGRAMA DAS FLECHAS IMEDIATAS COM UMA PDF LOGNORMAL, LAJE LR10025S5.....	216
FIGURA 109–HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS COM UMA PDF NORMAL, LAJE LR10025S5.....	217
FIGURA 110–HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS COM UMA PDF LOGNORMAL, LAJE LR10025S5.....	217
FIGURA 111 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS IMEDIATAS DA LAJE LR10025S7.....	218
FIGURA 112 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS DA LAJE LR10025S7.....	219
FIGURA 113 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS IMEDIATAS COM UMA PDF LOGNORMAL DA LAJE LR10025S7.....	219
FIGURA 114 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS COM UMA PDF LOGNORMAL DA LAJE LR10025S7.....	220
FIGURA 115 - DIAGRAMA CARGA – DESLOCAMENTO, RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGAVR1750S5.....	221
FIGURA 116 - HISTOGRAMA FLECHAS IMEDIATAS DA VIGAVR1750S5.....	222
FIGURA 117 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS DA VIGAVR1750S5.....	223
FIGURA 118 - GRÁFICOS Q x Q, DESLOCAMENTOS IMEDIATOS E DISTRIBUIÇÃO NORMAL E LOG NORMAL.....	223
FIGURA 119 - HISTOGRAMA FLECHAS IMEDIATAS COM UMA PDF NORMAL, DA VIGAVR1750S5.....	224
FIGURA 120 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS COM UMA PDF NORMAL DA VIGAVR1750S5.....	224
FIGURA 121 - VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA DE ACORDO COM A NBR 6118 (2007).	227
FIGURA 122 - RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5. DESLOCAMENTO TOTAL NO MEIO DO VÃO. $P_f = 0,62 (6,2 \times 10^{-1})$	228
FIGURA 123 - HISTOGRAMAS DAS FLECHAS IMEDIATAS E TOTAIS ($T = 50$ ANOS) COM DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL. VIGA VR1750S5 PARA $U_R = 75\%$ E $\phi_2 = 0,4$	229
FIGURA 124 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS IMEDIATOS, 180 DIAS, 1 ANO, 8 ANOS E 50 ANOS PARA A VIGA VR1750S5.	230
FIGURA 125 - RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5. DESLOCAMENTO TOTAL NO MEIO DO VÃO. $P_f = 0,55 (5,5 \times 10^{-1})$	231
FIGURA 126 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS IMEDIATOS, 180 DIAS, 1 ANO, 8 ANOS E 50 ANOS PARA A VIGA VR1750S5, PARA $U_R = 75\%$ E $\psi_2 = 0,3$	232
FIGURA 127 - PROBABILIDADES DE FALHA (P_f) PARA A VIGA VR1750S5 PARA UMIDADE RELATIVA DO AMBIENTE $U_R = 75\%$ E $\psi_2 = 0,3$ E $0,4$	233
FIGURA 128 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS IMEDIATOS, 180 DIAS, 1 ANO, 8 ANOS E 50 ANOS COM $T_0 = 90$ DIAS. VIGA VR1750S5, PARA $U_R = 75\%$ E $\psi_2 = 0,3$	234

FIGURA 129 - RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA LAJE LR10025S7. DESLOCAMENTO TOTAL NO MEIO DO VÃO. $P_F = 0,87 (8,7 \times 10^{-1})$	235
FIGURA 130 - PROBABILIDADES DE FALHA (P_F) PARA A LAJE LR10025S7, UMIDADE RELATIVA $U_R = 60\%$ E $\Psi_2 = 0,3$	236
FIGURA 131 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS IMEDIATOS, 180 DIAS, 1 ANO, 8 ANOS E 50 ANOS COM $T_0 = 28$ DIAS; LAJE LR10025S7, PARA $U_R = 60\%$ E $\Psi_2 = 0,6$	236
FIGURA 132 - RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A LAJE LR10025S5. DESLOCAMENTO TOTAL NO MEIO DO VÃO. $P_F = 0,61 (6,1 \times 10^{-1})$. $U_R = 60\%$ E $\Psi_2 = 0,3$	237
FIGURA 133 - PROBABILIDADES DE FALHA (P_F) PARA A LAJE LR10025S5.	238
FIGURA 134 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS IMEDIATOS, 180 DIAS, 1 ANO, 8 ANOS E 50 ANOS. LAJE LR10025S5.	238
FIGURA 135 - PROBABILIDADES DE FALHA (P_F) PARA VIGAS COM DIFERENTES VALORES DE ESBELTEZ L/H	240
FIGURA 136 - RESULTADO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5, DIMENSIONADA COM $F_{CTK,INF}$. DESLOCAMENTO TOTAL NO MEIO DO VÃO PARA $T = 50$ ANOS. $P_F = 0,24 (2,4 \times 10^{-1})$	242
FIGURA 137 - HISTOGRAMA DAS FLECHAS TOTAIS ($T = 50$ ANOS) COM DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL. VIGA VR1750S5 PARA $U_R 75\%$ E $\varphi_2 = 0,3$ E DIMENSIONADA COM $F_{CTK,INF}$	243
FIGURA 138 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE (PDF) PARA DESLOCAMENTOS OBTIDOS COMA VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA COM $F_{CTK,INF}$; PARA $U_R = 75\%$ E $\Psi_2 = 0,3$	244
FIGURA 139 - FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO $\mu_X = 0$ E $\sigma_X = 1$	263
FIGURA 140 - FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE UMA VARIÁVEL LOG-NORMAL.	264
FIGURA 141 - MAPAS DE CONDIÇÕES REGISTRADAS, UMIDADE RELATIVA DO AR, AS 00 UTC. FONTE: INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA, INMET (2011).	269
FIGURA 142 - MAPAS DE CONDIÇÕES REGISTRADAS, UMIDADE RELATIVA DO AR AS 12 UTC. FONTE: INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA, INMET (2011).	270
FIGURA 143 - MAPAS DE CONDIÇÕES REGISTRADAS, UMIDADE RELATIVA DO AR AS 18 UTC. FONTE: INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA, INMET (2011).	270

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - VALORES DO COEFICIENTE Ξ EM FUNÇÃO DO TEMPO. FONTE NBR 6118 (2007)	44
TABELA 2 – RELAÇÃO CONSTITUTIVA DO CONCRETO A COMPRESSÃO – FORMULAÇÃO NA LITERATURA	52
TABELA 3 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DE BARRAS E FIOS DE AÇO DESTINADOS A ARMADURAS PARA CONCRETO ARMADO	68
TABELA 4 - VALORES USUAIS PARA A DETERMINAÇÃO DA FLUÊNCIA E DA RETRAÇÃO. (FONTE: NBR 6118, 2007).....	83
TABELA 5 – FUNÇÕES DE FORMA EM FUNÇÃO DE Ξ	100
TABELA 6 - PROPRIEDADES DO AÇO E DO CONCRETO (BUCKHOUSE, 1997).	111
TABELA 7 - RESULTADOS DO TESTE DA VIGA C1 (BUCKHOUSE, 1997).	111
TABELA 8 - PARÂMETROS DAS VIGAS EXPERIMENTAIS VT1 E VT2 (BEBER, 1999).	114
TABELA 9–PARÂMETROS DAS VIGAS EXPERIMENTAIS VB4 E VB6 (JUVANDES, 1999).	116
TABELA 10 - PARÂMETROS DAS VIGAS EXPERIMENTAIS V1 E V2, (ÁLVARES,1993)... ..	118
TABELA 11 - RESULTADOS DAS FLECHAS NO TEMPO.	121
TABELA 12 - FLECHAS AOS 538 DIAS EM MM - DIVERSOS MÉTODOS (FONTE LLINAS, 2001).	121
TABELA 13 – PROPRIEDADES DO CONCRETO E DO AÇO.....	123
TABELA 14 - RELAÇÃO ENTRE A PROBABILIDADE DE FALHA P_f E O COEFICIENTE B	133
TABELA 15 – RELAÇÃO ENTRE B E A PROBABILIDADE DE FALHA P_f	134
TABELA 16 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVO B_T (E AS PROBABILIDADES DE FALHA ASSOCIADAS) RELATIVAS A UM ANO DE PERÍODO DE REFERÊNCIA PARA OS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS (ELU), (JCSS, 2000).	137
TABELA 17 - ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVO MÍNIMOS B_T RECOMENDADOS PELO EN 1990:2002	137
TABELA 18 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVO B_T RELATIVOS AO PERÍODO DE VIDA ÚTIL PARA ESTADOS LIMITES DE SERVIÇO IRREVERSÍVEIS E A PROBABILIDADE DE FALHA ASSOCIADA (LIFECON 2003).....	138
TABELA 19 – ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVOS DO JCSS (2000) PARA O ELS.	138
TABELA 20 – LIMITES PARA DESLOCAMENTO – ACEITABILIDADE SENSORIAL (FONTE NBR 6118, 2007).	140
TABELA 21 – INDICAÇÃO DE VIDA ÚTIL. (FONTE: CHEUNG, 2007).....	141
TABELA 22 - ÍNDICE DE CONFIABILIDADE PARA O PERÍODO DE REFERÊNCIA T_N	143
TABELA 23 - DESVIO-PADRÃO A SER ADOTADO EM FUNÇÃO DA CONDIÇÃO DE PREPARO DO CONCRETO	145
TABELA 24 – VALORES DE V_{cil} PARA CONCRETOS DE CLASSE C20, C25 E C30.....	146

TABELA 25 - VALORES DE V_c PARA CONCRETOS DE CLASSE C20, C25 E C30.....	146
TABELA 26 – VALORES DE V_r PARA CONCRETOS DE CLASSE C20, C25 E C30.....	147
TABELA 27 - VALORES DE V_{ec} PARA CONCRETOS DE CLASSE C20, C25 E C30.....	149
TABELA 28 – PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DO AÇO E DAS ARMADURAS	151
TABELA 29 - PROPRIEDADES DAS DIMENSÕES DAS VIGAS.....	153
TABELA 30 – MODELO ESTATÍSTICO DO CARREGAMENTO.....	156
TABELA 31 – PARÂMETROS ESTATÍSTICOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	157
TABELA 32 – VALORES DA AMOSTRA DA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO MÉDIA DO CONCRETO F_{cm}	172
TABELA 33 – RESUMO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DAS VIGAS E LAJES	194
TABELA 34 - RESUMO DAS CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO E DO AÇO.....	196
TABELA 35 - RESUMO DAS INFORMAÇÕES GERAIS SOBRE AS VIGAS E LAJES	197
TABELA 36 – FLECHA IMEDIATA E FLECHA TOTAL CALCULADA COM O MODELO SIMPLIFICADO DO ITEM 17.3.2.1 DA NBR6118 (2007)	198
TABELA 37 - FLECHA IMEDIATA E FLECHA TOTAL; MODELO MECÂNICO SEM O EFEITO DA RETRAÇÃO.	199
TABELA 38 - FLECHA IMEDIATA, RETRAÇÃO E FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO; MODELO MECÂNICO.	199
TABELA 39 - COMPARATIVO ENTRE O MODELO MECÂNICO SEM A RETRAÇÃO E A NBR 6118(2007).....	200
TABELA 40 - COMPARATIVO MODELO MECÂNICO COM A RETRAÇÃO E A NBR 6118(2007).....	200
TABELA 41 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DAS VIGAS E LAJES VR E LR	201
TABELA 42 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DAS VIGAS E LAJES VR E LR	202
TABELA 43 – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA FLECHA IMEDIATA, RETRAÇÃO E FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO.	202
TABELA 44 - FLECHA IMEDIATA, E FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO; COMPARATIVO ENTRE A SIMULAÇÃO E A NBR 6118.	203
TABELA 45 - FLECHA IMEDIATA, RETRAÇÃO E FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO; MODELO MECÂNICO COM UMIDADE RELATIVA $U_r = 60\%$	208
TABELA 46 - COMPARATIVO MODELO MECÂNICO ($U_r = 60\%$) COM A RETRAÇÃO E A NBR 6118 (2007).	208
TABELA 47 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA FLECHA IMEDIATA, RETRAÇÃO E FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO.	209
TABELA 48 – MÉDIA E COV; FLECHA TOTAL, COM EFEITO DA RETRAÇÃO PARA A VR2040S6.....	210
TABELA 49 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR2040S6.	211
TABELA 50 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR1750S5	226
TABELA 51 – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5	228

TABELA 52 – RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5.	234
TABELA 53 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO, LR10025S7.....	235
TABELA 54 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO, LR10025S5.....	237
TABELA 55 - SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA VIGAS VR PARA DIFERENTES VALORES DE L/H	239
TABELA 56- SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5 EM FUNÇÃO DA RESISTÊNCIA F_{CK}	241
TABELA 57 - SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO PARA A VIGA VR1750S5, DIMENSIONADA COM $F_{CTK\&INF}$	243
TABELA 58 - COEFICIENTE DE AJUSTE DA IDADE DO CONCRETO (χ). (FONTE: ACI 209R- 92, 1997)	268
TABELA 59 - UMIDADES RELATIVAS MÉDIAS (%) EM DIFERENTES CIDADES DA REGIÃO SUL DO BRASIL. FONTE: JANKOWSKY <i>ET AL.</i> (1986)	269
TABELA 60 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA PARA $F_{CK}^1 = 20$ MPa	271
TABELA 61 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA PARA $F_{CK}^1 = 30$ MPa	271
TABELA 62 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA PARA $F_{CK}^1 = 35$ MPa	272
TABELA 63 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA VIGA VR1750S5 DIMENSIONADA PARA $F_{CK}^1 = 40$ MPa	272

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
CAS	Sistema Computacional Algébrico (Computer algebraic system)
CEB	Comite European du Beton
CDF	Função de distribuição cumulativa de probabilidades (cumulative distribution function)
COV	Coefficiente de Variação
DEF	Deformação Excessiva
ELS	Estados Limites de Serviço
ELU	Estados Limites Últimos
EM	Método do módulo efetivo (Effective modulus)
NBR	Norma Brasileira
PDF	Função de densidade de probabilidade (probability density function)
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

A_{S1}	= Área da armadura superior
A_{Ssup}	= Área da armadura superior
$A_{Ssup,nom}$	= Área nominal da armadura superior
A_{S2}	= Área da armadura inferior
A_{Sinf}	= Área da armadura inferior
$A_{Sinf,nom}$	= Área nominal da armadura inferior
a_n	= Dimensão nominal
b	= Largura da viga
b_n	= Largura nominal da viga
c	= Cobrimento de concreto
d	= Altura útil da seção de concreto
d'	= Centro de gravidade da armadura tracionada
d'_n	= Centro de gravidade nominal da armadura tracionada
d''	= Centro de gravidade da armadura comprimida
B	= Matriz de deformação específica
D	= Rigidez material da seção
E_{ci}	= Módulo de elasticidade inicial tangente do concreto
E_c	= Módulo de elasticidade do concreto
E_{cs}	= Módulo de elasticidade secante do concreto
E_s	= Módulo de elasticidade do aço
E_t	= Módulo de elasticidade inicial tangente do concreto à tração
E_c	= Módulo de elasticidade modificado do concreto
F_{si}	= Força resultante
F	= Vetor de cargas
f_c	= Resistência à compressão do concreto
f'_c	= Tensão máxima de compressão no concreto
f_{cm}	= Resistência média à compressão do concreto
f_{ck}	= Resistência característica à compressão do concreto
f_{ct}	= Resistência à tração direta do concreto
$f_{ct,f}$	= Resistência à tração do concreto à tração na flexão
$f_{ct,m}$	= Resistência à tração média do concreto
f_t	= Tensão de tração no concreto
f'_t	= Tensão máxima de resistência do concreto à tração
f_y	= Resistência ao escoamento da armadura
G	= Ações permanentes
$G()$	= Função de estado limite
G_{nom}	= Ações permanentes nominais

h	= Altura da viga
h_{nom}	= Altura nominal da viga
h_{fic}	= Espessura fictícia da peça
I	= Momento de inércia
I_{II}	= Momento de inércia da seção fissurada de concreto
I_c	= Momento de inércia da seção bruta de concreto
I_{ctr}	= Momento de inércia da seção transformada de concreto
K	= Matriz de rigidez
L_o	= Vão livre da viga
L_n	= Vão livre nominal da viga
M_a	= Momento fletor na seção crítica
M_{cr}	= Momento de fissuração
M_x	= Momento resultante na seção de concreto
M_f	= Momento fletor aplicado
N	= Matriz de funções de interpolação
N_x	= Força resultante na seção de concreto
P_i	= Parcela de carga
P	= Probabilidade
P_{cr}	= Carga de fissuração
P_f	= Probabilidade de falha
q	= Cargas de superfície
Q	= Ações acidentais
Q_{nom}	= Ações acidentais nominais
R	= Resistência
S	= Solicitação
s	= Espaçamento transversal entre barras da armadura
S_d	= Desvio padrão
S_L	= Superfície específica da armadura tracionada
t	= Tempo na idade considerada
t_o	= Tempo na idade inicial
T_d	= Vida útil de projeto
T_n	= Período de referência
T_r	= Período de retorno
u	= Deslocamento axial
U	= Vetor de deslocamentos
U_a	= Umidade relativa do ambiente
V	= Volume
V_c	= Coeficiente de variação da resistência do à compressão do concreto
V_{cil}	= Coeficiente de variação da resistência do à compressão do corpo de prova cilíndrico de concreto

V_r	= Coeficiente de variação da resistência do à tração do concreto
V_{ec}	= Coeficiente de variação do módulo de elasticidade do concreto
u_{ar}	= Parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar
v	= Deslocamento transversal
x	= Altura da linha neutra, eixo x , varável x
Y	= Distribuição normal padrão
y	= Eixo y
y_t	= Distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada
W	= Trabalho
w	= Deslocamento transversal
Z	= Margem de segurança
z	= Eixo z
$\frac{1}{r}$	= Curvatura
α	= Parâmetro
β	= Coeficiente de confiabilidade
β_T	= Coeficiente de confiabilidade alvo
β_c	= Parâmetro de <i>tension stiffening</i> ; concreto a compressão
β_t	= Parâmetro de <i>tension stiffening</i> ; concreto à compressão
γ_c	= Coeficiente de ponderação da resistência do concreto
γ_f	= Coeficiente de ponderação das ações
γ_c	= Coeficiente de ponderação da resistência do concreto
γ_s	= Coeficiente de ponderação da resistência do aço
δ	= Deslocamento (flecha)
δ_{lim}	= Deslocamento limite (flecha limite)
$\Delta\xi$	= Fator dependente do tempo para ações quase permanentes
ε_{si}	= Deformação
ε_{imax}	= Deformação máxima do concreto à tração
ε_{ip}	= Deformação correspondente a tensão máxima do concreto à tração
ε	= Deformação específica
ε_c	= Deformação específica do concreto
ε_{co}	= Deformação específica correspondente a tensão máxima do concreto
ε'_c	= Deformação específica correspondente à tensão máxima do concreto
ε_s	= Deformação específica do aço

ε_{sm}	= Deformação específica média do aço
ε_u	= Deformação específica do aço na ruptura
ε_y	= Deformação específica de escoamento do aço
ε'_t	= Deformação correspondente à tensão máxima do concreto à compressão
θ	= Rotação
ε_{cm}	= Deformação no concreto
ν	= Coeficiente de Poisson
ξ	= Coordenada natural
λ	= Parâmetro da distribuição Gamma e Lognormal
μ	= Média
ρ	= Taxa geométrica da armadura longitudinal de tração
ρ'	= Taxa geométrica da armadura longitudinal de compressão
σ	= Tensão
σ_d	= Desvio padrão
φ	= Coeficiente de fluência
φ_a	= Coeficiente de deformação rápida
φ_f	= Coeficiente de deformação lenta irreversível
φ_d	= Coeficiente de deformação lenta reversível
Φ	= Função de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão
Ψ	= Vetor de forças residuais
Ψ_1	= Fator de redução de combinações frequentes para o ELS
Ψ_2	= Fator de redução de combinações quase permanentes para o ELS

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	IX
LISTA DE TABELAS.....	XVI
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	XIX
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XX
1. INTRODUÇÃO	29
1.1 Apresentação do problema de pesquisa	29
1.2 Objetivos	33
1.2.1 Objetivos Gerais	33
1.2.2 Objetivos Específicos	33
1.3 Justificativa e relevância	34
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	37
2.1 Introdução	37
2.2 Variabilidade e confiabilidade de vigas no ELS	37
2.3 Modelos de análise de deslocamentos	39
2.4 Método simplificado de cálculo de flechas	41
3. MODELO MECÂNICO	47
3.1 Introdução	47
3.2 Modelo de comportamento dos materiais	49
3.2.1 Relação constitutiva do concreto à compressão	50
3.2.2 Relação constitutiva do concreto à tração	54
3.2.3 Contribuição do concreto tracionado entre fissuras	55
3.2.4 Lei constitutiva do aço para armadura de concreto	67
3.2.4.1 Aço Classe A	67
3.2.4.2 Aço Classe B	67
3.2.5 Determinação da Relação Momento-Curvatura	70
3.3 Deformações do concreto	76
3.3.1 Deformação imediata	77
3.3.2 Fluência do concreto	77
3.3.3 Retração do concreto	78
3.3.3.1 Retração autógena	78
3.3.3.2 Retração por secagem	79
3.3.4 Modelos de materiais para fluência e retração	79
3.3.4.1 Deformações no concreto de acordo com a NBR 6118:2007	79

3.3.4.2	Valor da fluência	81
3.3.4.3	Retração do concreto	82
3.3.5	Efeitos de longa duração	85
3.3.5.1	Método do módulo efetivo (EM)	87
4.	ANÁLISE DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	91
4.1	Introdução	91
4.2	Vigas	91
4.2.1	Modelos matemáticos	91
4.2.2	Hipóteses básicas da teoria clássica de vigas	92
4.3	Teoria de viga de Bernoulli-Euler	93
4.3.1	Sistema de coordenadas do elemento	93
4.3.2	Cinemática	93
4.3.3	Carregamento	93
4.3.4	Condições de apoio	94
4.3.5	Tensões, Deformações e Momentos Fletores.	94
4.4	Análise não linear pelo Método dos elementos finitos	95
4.5	Formulação do elemento de viga plano	97
4.5.1	Elemento finito de viga de dois nós	97
4.5.2	Funções de forma de elementos finitos de vigas	98
4.5.3	Funções de forma	99
4.5.4	Equações do elemento finito de viga	100
4.5.5	Vetor de cargas nodais consistentes	102
4.6	Procedimento para a solução do sistema não linear	103
4.6.1	Algoritmo incremental-iterativo	104
4.7	Implementação	104
5.	VERIFICAÇÃO DO MODELO MECÂNICO	109
5.1	Introdução	109
5.2	Vigas submetidas a cargas imediatas	109
5.2.1	Ensaio de Buckhouse (1997)	109
5.2.2	Ensaio de Beber (1999)	113
5.2.3	Ensaio de Juvandes (1999)	115
5.2.4	Ensaio de Álvares (1993)	117
5.3	Vigas submetidas a cargas de longa duração	119

5.3.1	Introdução	119
5.3.2	Benchmarks propostos pelo RILEM	120
5.3.3	Comparativo com a norma NBR 6118 (2007)	122
6.	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	127
6.1	Introdução	127
6.2	O problema básico de confiabilidade	129
6.3	Variáveis aleatórias normais	130
6.4	O problema geral de confiabilidade	135
6.5	Confiabilidade alvo	136
6.6	Confiabilidade estrutural em serviço	139
6.6.1	Índices de confiabilidade relacionados à vida útil do projeto	141
6.7	Modelos probabilísticos das variáveis	143
6.7.1	Resistência do concreto à compressão	144
6.7.2	Resistência à tração	146
6.7.3	Módulo de elasticidade do concreto	148
6.7.4	Propriedades do aço e das armaduras	150
6.7.5	Propriedades geométricas das vigas e lajes	151
6.7.6	Umidade relativa do ambiente	153
6.7.7	Modelo probabilístico dos carregamentos	153
6.7.8	Resumo dos parâmetros estáticos das variáveis aleatórias	156
6.8	Simulação de Monte Carlo	157
6.8.1	Integração pelo método de Monte Carlo	160
6.8.2	Simulação pelo método de Monte Carlo	161
6.8.3	Geração de amostras de variáveis aleatórias	163
6.8.4	Geração de números aleatórios com distribuição uniforme	164
6.8.5	Teste de geradores congruenciais	166
6.8.6	Geração de variáveis aleatórias	170
6.8.7	Geração de amostra de uma variável aleatória no programa <i>Mathematica</i>	171
6.8.8	Histogramas das variáveis aleatórias de projeto	172
6.8.9	Determinação do número de simulações	178
6.8.10	Programa desenvolvido	178
7.	ESTUDO PARAMÉTRICO	183

7.1	Introdução	183
7.2	Resultados estatísticos dos ensaios comparativos	183
7.2.1	Vigas ensaiadas por BUCKHOUSE (1997)	184
7.2.2	Vigas ensaiadas por BEBER (1999)	188
7.3	Variabilidade dos deslocamentos em vigas e lajes projetadas pela norma NBR 6118(2007)	191
7.3.1	Carregamento aplicado para o estudo paramétrico	193
7.3.2	Comparativo entre o modelo mecânico e o método simplificado da NBR 6118 (2007)	197
7.3.3	Comparativo entre o modelo mecânico com variáveis aleatórias e o método simplificado da NBR 6118 (2007)	201
7.3.4	Análise do efeito de parâmetros de projeto na variabilidade dos deslocamentos	203
7.3.5	Análise do efeito da umidade relativa do ambiente na variabilidade dos deslocamentos	207
7.3.6	Análise do efeito da consistência do concreto no lançamento (slump).	209
7.4	Análise estatística dos deslocamentos	211
7.4.1	Análise dos deslocamentos das lajes	212
7.4.1.1	Laje LR10025S5	212
7.4.1.2	Laje LR10025S7	218
7.4.2	Análise dos deslocamentos das vigas	220
8.	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE NO ELS-DEF	225
8.1	Introdução	225
8.2	Análise de vigas e lajes dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2007)	225
8.2.1	Simulação para carga acidental em uso comercial	226
8.2.2	Simulação para carga acidental em uso residencial	231
8.2.3	Simulação para carregamento aplicado aos 90 dias	233
8.2.4	Análise de lajes unidirecionais e biapoiadas	234
8.3	Análise de vigas e lajes dimensionadas com diferentes relações de esbeltez	239
8.4	Análise em função da resistência do concreto	240
8.5	Análise de vigas e lajes dimensionadas com a resistência do concreto à tração inferior	241
9.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	245

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	248
NORMAS TÉCNICAS	258
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	260
APÊNDICE	261
Distribuições de probabilidades	261
Distribuição Normal	262
Distribuição Lognormal	263
Anexo A - Distribuições de probabilidades	265
Anexo B - Tabela da distribuição normal padrão	266
Anexo C - Coeficiente de ajuste da idade do concreto (χ).	268
Anexo D - Umidade relativa do ambiente no Brasil	269
Anexo E - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5.	271

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do problema de pesquisa

A resposta de uma estrutura às ações impostas depende do tipo, da magnitude dessas ações aplicadas, da sua resistência, rigidez e diversos outros parâmetros. Para que a resposta seja considerada satisfatória, certas necessidades precisam ser atendidas. Isso inclui a segurança da estrutura contra o colapso total ou parcial, limitação nos danos, ou nas deformações, ou outros critérios.

Cada uma dessas necessidades pode ser denominada de um estado limite. A violação de um estado limite pode ser definida como uma situação onde foi atingida uma condição indesejável para a estrutura.

De um modo geral as prescrições normativas para os estados limites últimos (ELU) tendem a ser amplamente fundamentadas em considerações de confiabilidade estrutural, por meio da calibração dos coeficientes de ponderação com índices de confiabilidade alvos, que tem por objetivo garantir um desempenho mais uniforme no projeto de estruturas para diferentes materiais construtivos.

As prescrições normativas para os estados limites de serviço (ELS), por outro lado, não têm sido desenvolvidas em tais bases probabilísticas e parece que as prescrições para o ELS nas normas existentes ainda não foram submetidas à calibração; apesar de diversos trabalhos na área já terem sido apresentados.

Calcular as probabilidades de falha em serviço por deformação excessiva apresenta um grau de dificuldade bem maior do que nos estados limites últimos, especialmente em estruturas de concreto armado. Esta dificuldade existe devido a certa indefinição no significado de "falha em serviço por deformação excessiva", além da complexidade e falta de precisão dos modelos de cálculo de flechas, e na dificuldade maior ainda de se calcular as probabilidades das falhas em serviço dependentes do tempo.

A frequência de problemas de desempenho em serviço aumentou significativamente com a utilização de materiais mais resistentes e a tendência moderna de se adotar concretos mais resistentes e construir estruturas com vãos maiores e mais esbeltas.

Um desses problemas, a deformação excessiva, pode acarretar uma variedade de problemas durante a vida útil de uma edificação, incluindo danos em elementos não estruturais ou no funcionamento de

equipamentos. Além disso, os deslocamentos calculados variam significativamente em relação aos valores medidos nas estruturas reais, devido às incertezas na história dos carregamentos e na variabilidade das propriedades dos elementos estruturais, tais como o módulo de elasticidade, módulo de ruptura, deformação lenta e retração, bem como aos erros de modelo nos procedimentos de cálculo.

Na experiência profissional em projetos, tem-se constatado que o cálculo dos deslocamentos e flechas das estruturas de concreto armado não é realizado com o mesmo grau de confiança e importância que os cálculos para atender aos estados limites últimos. Parece que a desconfiança nos resultados obtidos pelos procedimentos usuais é proporcional às incertezas inerentes ao fenômeno das deformações dos elementos de concreto armado.

Ao longo da vida profissional de um engenheiro de projeto, a experiência com um caso de colapso total ou parcial é um evento muito raro, por outro lado, é provável que algumas das estruturas projetadas por estes mesmos profissionais tenham sofrido algum tipo de falha em serviço. De certo modo isso gera conceitos errados com relação aos objetivos da confiabilidade das estruturas; existe uma grande confiança no dimensionamento para os estados limites últimos e pouca importância dada ao projeto adequado para as situações em serviço. Atualmente as falhas em serviço têm sido penalizadas com maior rigor em virtude dos códigos civis e normas de projeto mais rigorosos, portanto não é mais possível colocar a verificação dos estados limites em serviço em um segundo plano no projeto de estruturas.

Os procedimentos apresentados em muitas normas de projeto, como na NBR 6118 (2007), para previsão e o cálculo de flechas resulta em um valor determinístico de projeto que é maior ou menor que as flechas que ocorrerão na estrutura.

Nenhum método de análise estrutural, por mais refinado que seja, tem sido capaz de prever o valor real das flechas imediatas e diferidas, porque a variabilidade do fenômeno é muito alta. O comportamento real é um fenômeno complexo que pode ser analisado com um tratamento estatístico e utilizar a teoria da confiabilidade para um tratamento mais racional.

Segundo Stephen e Scanlon (1986) resultados de testes de laboratório para vigas e lajes estão disponíveis para sistemas estruturais simplesmente apoiados e contínuos. Estes testes têm sido usados pelos pesquisadores para confirmar a validade da equação de Branson (1968) para o cálculo de deslocamentos. Além destes ensaios eles também compararam os resultados de deslocamentos calculados com os valores

de deslocamentos medidos em campo, obtidos em um edifício de escritórios construído em Edmonton, Canadá.

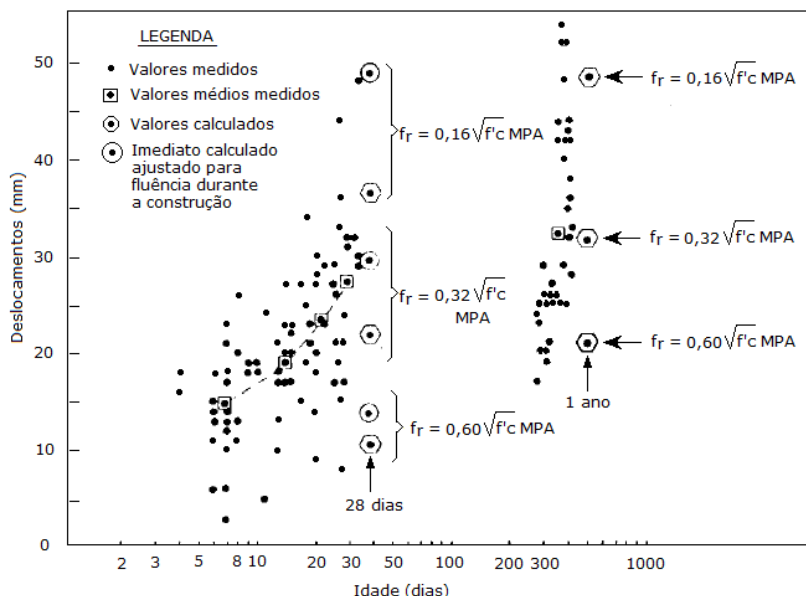


Figura 1 - Comparativo entre deslocamentos calculados e medidos em campo. Fonte: Adaptado de Stephen e Scanlon (1986).

Os resultados mostrados na Figura 1 são medidas de deslocamentos feitas durante a construção e aproximadamente um ano após a construção de 40 painéis de lajes idênticas.

Os deslocamentos médios indicam o aumento gradual dos deslocamentos devido ao aumento do carregamento do escoramento bem como devido aos efeitos da fluência.

Pode-se dizer que a variabilidade dos deslocamentos é devida a outros efeitos além do grau de fissuração. Variações nos carregamentos reais, nas propriedades de fluência e retração, nas dimensões das lajes, erros de medida, e outros efeitos, todos contribuem para a variabilidade total apresentada.

Conforme Stephen e Scanlon (1986), entretanto, devido à sensibilidade dos deslocamentos calculados em função da resistência à tração do concreto admitida nos cálculos, é razoável esperar que uma grande variabilidade nos deslocamentos seja devida a variações no nível de fissuração.

Para estudar a variabilidade nos deslocamentos, será utilizado neste trabalho um modelo mecânico determinístico de simulação pelo Método de Monte Carlo, com um programa de computador em um ambiente CAS (*Computer Algebraic System*), em uma série de amostras de vigas e lajes de concreto armado submetidas a diversos carregamentos. Os resultados desta simulações serão utilizados para determinar a influência de diversos parâmetros na variabilidade das flechas e calcular a probabilidade de falha em serviço para determinadas flechas limites.

O estudo será feito para vigas biapoiadas e lajes unidirecionais e biapoiadas de concreto armado, com seções retangulares, com diversas taxas de armadura e diversas relações de esbeltez, definida pela relação entre o vão e a altura da seção. O modelo mecânico determinístico para o cálculo das flechas de vigas de concreto armado foi desenvolvido baseado no Método dos Elementos Finitos com a implementação de elementos de viga de Euler-Bernoulli e com o emprego das relações momento fletor *versus* curvatura das seções de concreto.

O modelo considera a não linearidade física dos materiais componentes, leva em conta a fissuração, a deformação lenta e a retração do concreto. Ao invés de utilizar o procedimento de elemento de viga em camadas, neste trabalho foram utilizadas relações momento-curvatura das seções de concreto armado previamente construídas através da análise das seções.

Este modelo consiste em discretizar a viga em vários elementos de pequena dimensão, utilizando a formulação de elementos finitos para obtenção dos deslocamentos e esforços nodais, desprezando-se a deformação devido ao cisalhamento. Para cada elemento a rigidez secante (EI_{sec}) é calculada a partir do diagrama momento-curvatura, construído com base na teoria clássica de vigas e com as deformações calculadas com incrementos de momentos fletores até a ruptura.

Com o objetivo de estabelecer a validade do procedimento adotado, o modelo é verificado com a comparação entre os resultados de deslocamentos calculados e os resultados medidos em vigas e lajes biapoiadas ensaiadas em laboratório por diversos autores.

Com os resultados destas análises, espera-se poder compreender melhor o comportamento da deformação de vigas de concreto armado em serviço e contribuir com o aperfeiçoamento do procedimento de cálculo de flechas da norma brasileira NBR-6118 (2007).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

- Estudar a variabilidade dos deslocamentos imediatos e deslocamentos totais, de vigas e lajes biapoiadas de concreto armado no estado limite de deformação excessiva (DEF) dimensionadas de acordo com as recomendações da norma brasileira NBR 6118 (2007).
- Analisar a confiabilidade dos deslocamentos imediatos e deslocamentos totais, de vigas e lajes biapoiadas de concreto armado no estado limite de deformação excessiva (DEF) dimensionadas de acordo com as recomendações da norma brasileira NBR 6118 (2007).
- Contribuir com possíveis melhorias nos procedimentos de verificação do estado limite de serviço por deformação excessiva da norma brasileira NBR 6118 (2007).

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver um modelo mecânico preciso para o cálculo de flechas de vigas contínuas de concreto armado pelo método dos Elementos Finitos, que considera o efeito da redução da rigidez à flexão devido à fissuração e a não linearidade física dos materiais componentes. Este modelo irá empregar relações momento fletor-curvatura das seções de concreto. O modelo também deverá levar em conta a deformação lenta e a retração do concreto e, após a fissuração, incluirá o efeito do enrijecimento do concreto tracionado entre fissuras.
- Desenvolver um programa de computador em linguagem funcional, em um ambiente CAS (*Computer Algebraic System*), utilizando o sistema computacional do *software Mathematica* (WOLFRAM, 2003). Este programa será usado para realizar as análises do modelo mecânico de vigas pelo método dos elementos finitos, empregando relações momento fletor-curvatura das seções de concreto, e para realizar as análises probabilísticas e de confiabilidade por meio de simulações numéricas pelo método de Monte Carlo.

1.3 Justificativa e relevância

O uso de teorias de confiabilidade e conceitos probabilísticos está bem estabelecido como base para definir os critérios de projeto para a segurança de estruturas de concreto contra o colapso total ou parcial. Um método de coeficientes parciais para ações e resistências já vem sendo usado por diversas normas de projeto, e também pela norma brasileira NBR 6118 (2007) há muitos anos. Os valores dos diversos coeficientes parciais têm sido obtidos por meio de análises probabilísticas e procedimento de calibração normativa, com base nas experiências das estruturas já executadas. Esta calibração tem o objetivo de produzir níveis de segurança aproximadamente uniformes em diversas condições de uso das estruturas.

Enquanto os procedimentos de projeto, de um modo geral, produzem estruturas que apresentam um desempenho satisfatório, não é possível afirmar se o comportamento das estruturas em serviço, especialmente em relação às deformações, apresentam índices de confiabilidade uniformes. Para Stewart (1996), parece que as prescrições para os Estados Limites de Serviço (ELS) nas normas existentes não foram ainda submetidas à calibração, apesar de algum trabalho ter sido conduzido para normas de estruturas de aço e madeira por Galambos e Ellingwood (1996) e por Philpot *et al.* (1993).

De certo modo isso não é uma surpresa porque é mais difícil calcular as probabilidades de falha em serviço do que nos estados limites últimos, especialmente em estruturas de concreto armado. Isso se deve, como já mencionado, às dificuldades de definir o que significa (ou em que se constitui) uma "falha em serviço", à complexidade e falta de precisão dos modelos de cálculo de flechas em concreto armado, e às dificuldades de se calcular as probabilidades de falha em serviço dependentes do tempo.

Com a tendência moderna de se construir estruturas com vãos maiores e mais esbeltas, aumentou a frequência de problemas de desempenho em serviço. Um desses problemas, a deformação excessiva, pode acarretar uma variedade de condições não aceitáveis durante a vida útil de uma edificação, incluindo danos em elementos não estruturais ou no funcionamento de equipamentos etc.

Como já mencionado, é amplamente reconhecido que os deslocamentos calculados variam significativamente em relação aos valores medidos nas estruturas reais, devido às incertezas na história dos carregamentos e na variabilidade das propriedades dos elementos estruturais, tais como o módulo de elasticidade, módulo de ruptura,

deformação lenta e retração, bem como os erros de modelo nos procedimentos de cálculo.

A própria norma brasileira de projeto de estruturas de concreto armado, NBR 6118 (2007), no item 17.3.2.1, afirma que não se deve esperar uma grande precisão no cálculo de flechas em vigas de concreto armado devido à grande variabilidade apresentada.

Portanto, torna-se plenamente justificável a realização deste trabalho de pesquisa, que tem por objetivo avaliar os efeitos de diversos parâmetros que afetam a variabilidade dos valores das flechas em vigas e lajes de concreto armado, bem como a avaliação da confiabilidade destes elementos no estado limite de deformação excessiva (ELS), projetados de acordo com as normas brasileiras. Espera-se que os resultados que forem obtidos possam contribuir para uma melhor compreensão destes fenômenos e, acrescentar melhorias no procedimento de verificação destas condições em serviço.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

O dimensionamento de vigas e lajes de concreto armado para atender aos critérios de limitação de flechas em serviço foi durante anos baseado na adoção de valores mínimos para a relação entre o vão e a altura de vigas e lajes, como ainda é adotado em diversas normas e era adotado na NBR 6118 (1978). Atualmente este dimensionamento é feito, como no caso da nova norma brasileira NBR 6118 (2007), com o cálculo dos deslocamentos e a verificação com valores práticos limites especificados nesta norma.

Como já mencionado, os deslocamentos calculados variam significativamente em relação aos valores medidos nas estruturas reais, e diversos autores apresentaram resultados de estudos numéricos e medidas experimentais que confirmam esta afirmação.

Em 1963 o ACI 318-63 introduziu critérios para flechas em elementos de concreto armado apoiados em uma e duas direções. Esta norma prescrevia que espessuras e alturas mínimas deveriam ser adotadas em elementos de estruturas de concreto armado e permitia valores inferiores aos prescritos, desde que fosse feita uma comprovação que valores menores não iriam causar efeitos adversos.

2.2 Variabilidade e confiabilidade de vigas no ELS

O ACI Committee 435 (1966) publicou um relatório estabelecendo a validade do seu método para o cálculo dos deslocamentos de elementos de concreto armado. Pela comparação de valores previstos com este método e resultados experimentais, a variabilidade no entorno do valor médio foi de aproximadamente 30 %.

O relatório ACI Committee 435 (1972) publicado por este mesmo comitê em 1972 concluiu que “existe uma probabilidade de 90% de que os deslocamentos de uma determinada viga estejam dentro do limite de 20 % abaixo ou de 30% acima do que o valor calculado”.

Reid e Turkstra (1980) propuseram um método baseado na aplicação da teoria da utilidade em combinação com análises probabilísticas e reconheceram que a falha em serviço é um problema econômico, já que uma estrutura que não é mais considerada aceitável em serviço pode ainda possuir uma ampla margem de segurança contra o colapso.

Sbarounis (1984) relatou coeficientes de variação (razão entre o desvio padrão e a média, denominado COV) de 0.21 para flechas medidas em campo em edifícios de múltiplos-andares, enquanto Jokinen e Scanlon (1984) relataram coeficientes de variação de 0.30 em medidas de campo de edifícios de múltiplos andares.

Apesar da dificuldade de se definir o que constitui "falha em serviço", Li e Melchers (1987) desenvolveram um procedimento para calcular a probabilidade de falha em serviço de estruturas de concreto armado. Galambos e Ellingwood (1996) e Philpot *et al.* (1993) desenvolveram diversos trabalhos para as prescrições em serviço de estruturas de aço e madeira.

Um estudo elaborado por Mirza e McGregor (1995), com o objetivo de calcular a variabilidade de flechas imediatas baseadas em uma simulação de Monte Carlo, indicaram coeficientes de variação entre 0.25 e 0.50, dependendo basicamente da razão entre o momento máximo aplicado e o momento de fissuração.

Stewart (1996) concluiu que os critérios adotados pelas normas Australiana, Britânica e Americana, de especificar relações mínimas entre vão e altura de lajes e vigas de concreto armado resultam em peças com probabilidade de falha em serviço não uniformes, com valores de coeficientes de confiabilidade muito variáveis. O coeficiente de confiabilidade, também conhecido como coeficiente β , é uma medida padrão de confiabilidade obtida em função da probabilidade de falha de uma estrutura ou de um elemento estrutural e relacionada com um determinado estado limite de projeto. Para vãos da ordem de 4m ele obteve valores de β no entorno de 5 e, para vãos da ordem de 10 m, valores de β inferior a 2. Isso mostrou que esse tipo de critério, presente também na NBR-6118 (1978) e ausente da NBR-6118 (2007), produz probabilidades de falha em serviço muito diferentes.

Real e Campos (1995) realizaram estudos de vigas de concreto armado com um método de elementos finitos probabilístico, também com simulações com o Método de Monte Carlo. Eles concluíram que os valores esperados dos deslocamentos crescem com o aumento da variação dos parâmetros de propriedades dos materiais, e, no caso da resistência à compressão do concreto, foram encontrados valores de COV de 0,05 a 0,2.

Em um estudo de vigas e pilares com simulações pelo Método de Monte Carlo, Real e Campos (2001) também encontraram uma ampla variação para os valores de COV, entre 0,10 e 0,70, para as flechas no meio do vão de vigas biapoiadas de concreto armado projetadas de acordo com a norma brasileira NBR 6118 (1980).

Rosowsky, Stewart e Khor (2000) estão entre os primeiros a investigar os efeitos do carregamento no início da vida de elementos de concreto armado e também realizaram um estudo com a simulação de Monte Carlo incluindo os efeitos das cargas de curta duração em flechas de longa duração de vigas de concreto armado. Eles reportaram coeficientes de variação (COV) de 0,19 a 0,28 para 1 ano de referência, 0,21 a 0,28 para 8 anos e 0,23 a 0,29 para 50 anos de referência, com diferentes níveis de escoramento durante a construção. Concluíram que as cargas imediatas provenientes das operações de construção, com procedimentos diferentes, influenciam significativamente nos valores e nos COV das flechas imediatas e de longa duração. Concluíram, além disso, que as prescrições do ACI 318 subestimam as flechas de longa duração, especialmente nos casos onde ocorrem carregamentos importantes de curta duração no início da vida da estrutura.

Choi, Scanlone e Johnson (2004) encontraram em um estudo com vigas, usando também simulação com o método de Monte Carlo, uma variação mais ampla com COV entre 0,12 e 0,84. Os valores mais baixos correspondem a vigas com altas taxas de armadura longitudinal e com comportamento dominado por seções fissuradas e com armadura que tem grande influência na rigidez do elemento. Os coeficientes mais altos de variação correspondem a vigas onde o momento nominal aplicado fica próximo do momento de fissuração e existe uma grande diferença entre a rigidez fissurada e a não fissurada. Estes casos resultam em distribuições bimodais com valores altos de COV das flechas. Os resultados de Choi, Scanlon e Johnson (2004) sugerem que um procedimento mais conservador deve ser usado para o cálculo de flechas de vigas com taxas de armadura baixas.

2.3 Modelos de análise de deslocamentos

Com relação aos modelos mecânicos de vigas e lajes de concreto armado usados nas simulações, é importante salientar que existem muitos estudos e muitas abordagens diferentes. Os modelos analíticos têm sido geralmente baseados na substituição do contínuo por um conjunto de elementos finitos que representam o concreto e o aço das armaduras.

Conforme Choi (1998), *apud* Scanlone e Polak (1996), duas abordagens principais tem sido usadas:

- 1) o modelo proposto originalmente por Ngoe e Scordelis (1967), chamado de modelo discreto, que utiliza microelementos e onde

- a estrutura é discretizada em muitos elementos finitos e onde cada elemento representa uma localização da estrutura;
- 2) o modelo de macro elementos, onde cada elemento finito representa ao mesmo tempo os dois materiais (concreto e aço), e todos os fenômenos locais são incorporados em um modelo constitutivo usado no cálculo da matriz de rigidez do elemento.

Este segundo modelo tem sido mais usado para o cálculo de deslocamentos em estruturas de concreto, especialmente as vigas, por ser de fácil aplicação. O modelo de macro elementos divide-se em duas categorias: os modelos de elementos em camadas (*layered elements*) e os modelos de rigidez efetiva para vigas, placas e cascas.

Conforme Oliveira (2001), o modelo de seção em camadas ou estratificada permite a aplicação de modelos constitutivos independentes para o aço e o concreto. Neste modelo o elemento finito é igualmente dividido em camadas ao longo da altura. A armadura é considerada distribuída ao longo do elemento de concreto e uma aderência total é admitida entre o concreto e a armadura. Após a formação de fissuras o conceito da contribuição do concreto entre fissuras (*tension stiffening*) pode ser incluído.

Para considerar esse efeito a maioria dos modelos de análise atualmente usa o conceito de fissuras distribuídas (*smearred cracking model*), no qual uma fissuração progressiva é admitida como estando distribuída totalmente em um elemento ou nos pontos de integração dentro do elemento, em contraposição ao modelo de fissuras discretas, que representa as fissuras individualmente e exige maior esforço computacional.

As dificuldades na análise de vigas de concreto armado devem-se, entre outros fatores, à modelagem do comportamento conjunto de dois materiais com propriedades distintas (concreto e aço), da história do carregamento, a não linearidade da resposta devida à fissuração e a influência dos efeitos diferidos provocados pela fluência e retração do concreto. No caso da análise em serviço tem especial importância a determinação dos deslocamentos e do estado de tensões e de fissuração ao longo das partes da estrutura, e também ao longo do tempo.

Muitos modelos determinísticos têm sido apresentados ao longo dos anos para o cálculo de flechas em vigas e lajes de concreto armado. Eles vão desde modelos simples, baseados na teoria elástica de vigas e multiplicadores, para calcular flechas imediatas e de longa duração obtidos de maneira empírica, até modelos mais elaborados por elementos finitos com modelos constitutivos mais refinados.

Existem diversos procedimentos de análise simplificados do comportamento de seções isoladas de concreto armado em serviço, que são extrapolados para o comportamento dos elementos da estrutura, reconhecidos na maioria das normas de projeto e concebidos para serem aplicados em uma única história de carga isolada.

Alguns desses procedimentos possuem equações e coeficientes multiplicadores para calcular flechas imediatas e de longa duração obtidos de maneira empírica, e deve-se levar em conta que são precisos quando se reproduzem as condições dos ensaios em que foram baseados. Devido a esta situação, têm sido desenvolvidos modelos de análise mais gerais e que consideram de maneira mais racional os principais fenômenos mencionados anteriormente.

O modelo mais usado na prática do cálculo de estruturas, devido à sua facilidade de aplicação, se baseia na determinação de um momento de inércia efetivo (I_e) para um elemento fissurado. Diversas equações empíricas foram propostas para I_e , dentre as quais a mais conhecida é a de Branson (1968), recomendada pelo ACI 318 e adotado pela NBR 6118 (2007). Neste modelo, conforme demonstrou Bischoff (2005), o efeito do enrijecimento do concreto à tração entre as fissuras é bastante dependente do nível de carregamento relativo ao momento de fissuração, bem como da razão entre o momento de inércia da seção não fissurada e o momento de inércia da seção transformada (I_c/I_{ctr}). Por isso, a equação de Branson acaba superestimando os deslocamentos em elementos com pequena taxa de armadura.

2.4 Método simplificado de cálculo de flechas

Estes métodos se baseiam geralmente em simplificações derivadas dos procedimentos de rigidez equivalente ou do comportamento das seções. A metodologia mais usada tem sido a da rigidez equivalente de Branson (1968) para o cálculo direto das flechas imediatas.

Para a flecha diferida são utilizados coeficientes que levam em consideração a duração de aplicação do carregamento e a quantidade de armadura de comprimida.

A norma NBR 6118 (2007) permite avaliar de forma simplificada os deslocamentos nas vigas e lajes, com a determinação de uma rigidez equivalente. Neste procedimento, o cálculo dos deslocamentos de vigas de concreto armado é feito considerando-se a redução na rigidez da peça em função da fissuração e acrescentando-se o efeito de longa duração

devido à fluência do concreto. É importante destacar que a norma NBR 6118 (2007) esclarece no item 17.3.2 que:

A deformação real da estrutura depende também, além da fissuração e da fluência, do processo construtivo, das propriedades dos materiais, principalmente do módulo de elasticidade e da resistência à tração do concreto, no momento de sua efetiva solicitação. Em face da grande variabilidade dos parâmetros citados, existe uma grande variabilidade das deformações reais. Não se pode esperar, portanto, grande precisão nas previsões de deslocamentos dadas pelos processos analíticos prescritos.

De acordo com NBR 6118 (2007) o modelo de comportamento da estrutura pode admitir o concreto e o aço como materiais de comportamento elástico e linear, de modo que as seções ao longo do elemento estrutural possam ter as deformações específicas determinadas no estágio I, desde que os esforços não superem aqueles que dão início à fissuração e considerando a fissuração em caso contrário.

Deve ser utilizado no cálculo o valor do módulo de elasticidade secante E_{cs} definido no item 8.2.8 da NBR 6118 (2007), sendo obrigatória a consideração do efeito da fluência.

Quando não forem feitos ensaios e não existirem dados mais precisos sobre o concreto usado na idade de 28 dias pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade usando a equação:

$$E_{ci} = 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (1)$$

O módulo de elasticidade secante a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve ser calculado por:

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} \quad (2)$$

Segundo a NBR 6118 (2007), para uma avaliação aproximada da flecha imediata em vigas pode-se utilizar a expressão de rigidez equivalente, proposta originalmente por Branson, dada a seguir:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (3)$$

onde:

- I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;
- I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no Estádio II;
- M_a é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;
- M_r é o momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas;
- E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto

De acordo com a NBR-6118 (2007), o momento de fissuração é dado por:

$$M_r = \frac{\alpha I_c f_{ct}}{y_t} \quad (4)$$

onde y_t é a distância do centroide da seção à fibra mais tracionada e o coeficiente α tem os seguintes valores:

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares.

α é um fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta.

f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto, com o quantil apropriado a cada verificação particular.

De acordo com a NBR-6118 (2007), para a determinação do momento de fissuração deve ser usado o $f_{ct\ inf}$ no estado limite de formação de fissura e o $f_{ct\ m}$ no estado limite de deformação excessiva.

De acordo com a NBR 6118 (2007), as flechas diferidas são aquelas que surgem ao longo do tempo, sob a ação de cargas de longa duração, decorrentes dos efeitos de retração e fluência, e somam-se às flechas imediatas.

O cálculo da flecha adicional diferida em vigas é feito conforme o item 17.3.2.1.2 da NBR 6118 (2007), em função do tempo e da taxa de armadura à compressão. O cálculo é feito de maneira aproximada, multiplicando a flecha imediata pelo fator $(1+\alpha_f)$. Este é o valor final que deve ser verificado e analisado.

O valor de α_f é dado pela expressão abaixo:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \rho'} \quad (5)$$

onde:

$$\rho' = \frac{As'}{b d} \quad (6)$$

e ξ é um coeficiente função do tempo obtido diretamente na tabela 17.1 da NBR 6118 (2007) ou calculados por meio das expressões abaixo:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (7)$$

$$\xi(t) = 0.68(0.996^t)t^{0.32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (8)$$

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (9)$$

Tabela 1 - Valores do coeficiente ξ em função do tempo. Fonte NBR 6118 (2007)

Tempo (t)	0	0,5	1	2	3	4
Coeficiente ξ (t)	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04

Tempo (t)	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente ξ (t)	1,12	1,36	1,64	1,89	2

onde:

t é o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

t_0 é a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração. Se as parcelas da carga de longa duração forem aplicadas em idades diferentes, pode-se tomar para t_0 o valor ponderado a seguir:

$$t_0 = \frac{\sum P_i t_{0i}}{\sum P_i} \quad (10)$$

onde:

P_i , representa as parcelas de carga;

t_{0i} é a idade em que se aplicou cada parcela P_i , em meses.

Os conceitos de flechas imediatas e diferidas apresentados acima também se aplicam às lajes, conforme prescrito no item 19.3.1-Estado limite de deformação da NBR 6118 (2007).

Araújo (2004) avaliou a precisão e a validade dos métodos simplificados para cálculo de flechas em vigas de concreto armado, comparando-os com um modelo não linear mais refinado. Ele utilizou o método bilinear do CEB, uma fórmula prática apresentada no código modelo CEB-FIP/90 e o método simplificado adotado na NBR 6118 (2007).

Araújo (2004) observou que para flechas imediatas todos os modelos anteriormente citados apresentam uma boa concordância entre os resultados. Para as flechas diferidas no tempo, o método da NBR

6118 (2007) não apresentou bons resultados, subestimando as flechas das vigas pouco solicitadas e superestimando a flecha das vigas mais solicitadas que estão num grau de fissuração maior.

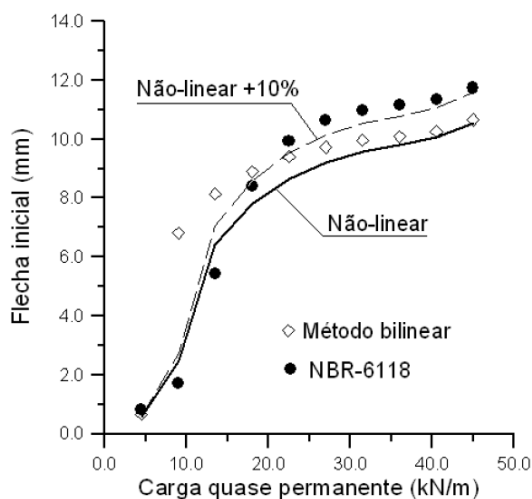


Figura 2 – Flecha inicial (imediata) para carregamentos quase permanentes por diferentes métodos (ARAUJO, 2004).

3.MODELO MECÂNICO

3.1 Introdução

A consideração de conceitos probabilísticos nas variáveis de projeto de estruturas não é correta sem a utilização de um modelo mecânico que represente com precisão adequada a resposta da estrutura. No caso do concreto armado, devido a diversos fatores, os materiais que compõem a estrutura têm um comportamento significativamente não linear, que é denominado de não linearidade física.

Para a análise de vigas de concreto armado é fundamental que os deslocamentos e esforços sejam obtidos de maneira precisa. Como os deslocamentos verticais são afetados diretamente pela rigidez dos elementos da viga, essa rigidez deve ser calculada por meio de procedimentos que considerem a não linearidade física dos materiais componentes.

Em vigas e lajes de concreto armado, o fenômeno de resposta da carga *versus* deslocamento pode ser observado, como mostrado na Figura 3. Para cargas menores do que a carga de fissuração, P_{cr} , a viga não está fissurada e se comporta de modo homogêneo e elástico. A primeira fissura da peça aparece com a carga P_{cr} , quando a tensão de tração no concreto na fibra mais extrema, na seção de momento máximo, atinge a tensão de resistência à tração do concreto na flexão ou o módulo de ruptura.

O deslocamento ou flecha correspondente é o valor δ_{cr} e o deslocamento δ_{sr} seria o valor para o caso em que o concreto não tivesse nenhuma resistência à tração. Na região próxima a esta primeira fissura ocorre uma súbita mudança na rigidez da peça. Na seção que contém a fissura, a rigidez à flexão se reduz significativamente, mas a maior parte da viga permanece sem fissuras. Com o aumento da carga, mais fissuras se formam e a rigidez à flexão média da viga inteira diminui.

O deslocamento correspondente a carga de serviço P é o valor δ_{sm} e δ_s o valor do deslocamento para a carga P sem o enrijecimento à tração (*tension stiffening*). A tensão de tração média no concreto diminui à medida que mais fissuras são formadas e a resposta efetiva da viga tende para uma resposta de resistência à tração nula do concreto, ao menos até que o padrão de fissuras esteja plenamente desenvolvido e o número de fissuras se estabilize.

Na Figura 4, é mostrado o comportamento de um elemento de concreto armado submetido à flexão, onde ϵ_s é a deformação da

armadura tracionada, ε_{sm} a deformação média nesta mesma armadura, e ε_{s2} a correspondente à seção totalmente fissurada (estádio II).

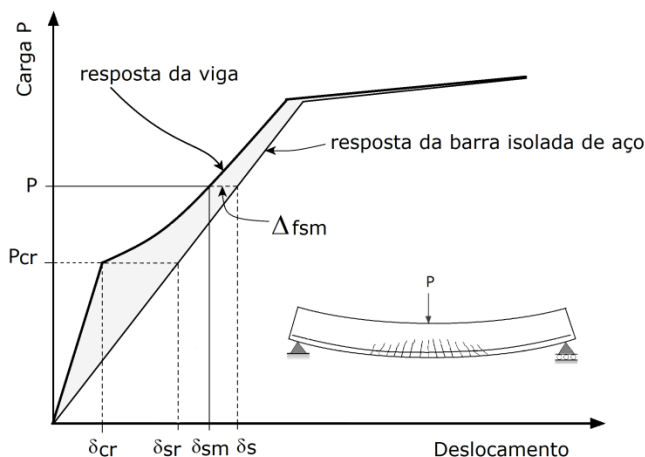


Figura 3 - Diagrama de resposta carga-flecha de uma viga submetida à flexão.

Como já mencionado, quando as tensões no concreto superam o valor da resistência à tração se produzem as fissuras. Devido ao seu caráter discreto, entre as fissuras consecutivas de um elemento de viga tracionado de concreto armado, existe uma parte de concreto que colabora na resistência da peça devido às tensões de aderência com as barras de aço.

Esta colaboração do concreto tracionado entre as fissuras produz um efeito de enrijecimento que é conhecido pelo termo da nomenclatura inglesa como “*tension stiffening*”.

O efeito de *tension stiffening* tem uma grande influência no comportamento das deformações de estruturas de concreto armado, especialmente nas situações de serviço.

Este comportamento resulta em uma relação momento *versus* curvatura para as seções de concreto entre dois limites, C_I correspondente à seção não fissurada (Estádio I) e C_{II} para a seção totalmente fissurada (Estádio II), conforme mostrado na Figura 5. A resposta carga *versus* deslocamento de uma viga de concreto armado pode então ser obtida em função das relações momento *versus* curvatura das seções. M_{cr} é o momento de fissuração da seção de concreto.

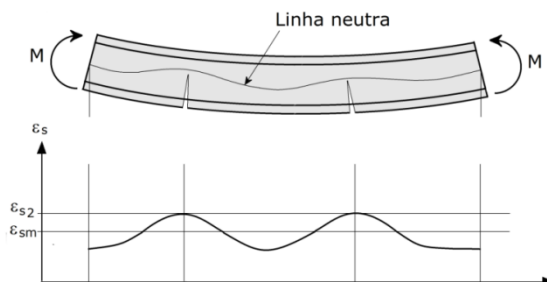


Figura 4 – Elemento de concreto armado fissurado submetido à flexão.
Fonte: Adaptado de Llinás (2001).

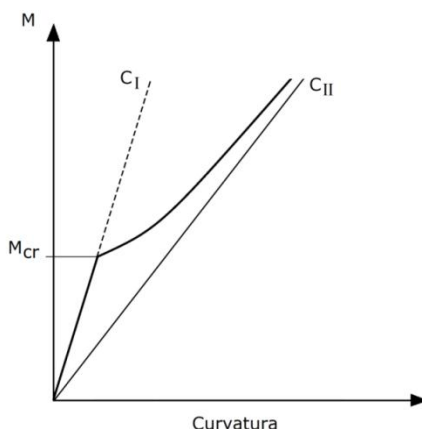


Figura 5 - Diagrama momento fletor – curvatura.

3.2 Modelo de comportamento dos materiais

Conforme Kwak e Kim (2002), a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento depende em grande parte da relação tensão-deformação dos materiais constituintes e da magnitude das tensões.

As propriedades mecânicas do concreto submetido à compressão uniaxial tais como, a resistência e a deformação correspondente, o módulo de elasticidade e a curva tensão-deformação, são obtidas de ensaio em corpos de prova cilíndricos e cúbicos.

O ramo descendente da curva tensão-deformação é muito mais difícil de ser obtido experimentalmente, o ensaio deve ser conduzido com deformação controlada e a rigidez da máquina pode influenciar na resposta.

Os corpos de prova sujeitos à tração uniaxial apresentam um comportamento praticamente linear até o valor máximo da tensão de resistência à tração, a partir do qual a tensão diminui rapidamente até se anular, com um aumento da deformação média. O formato do diagrama-tensão deformação, no entanto, depende significativamente do procedimento de teste (CARREIRA e CHU, 1988).

Experimentos têm demonstrado, que se a taxa de deformação for controlada, o diagrama tensão-deformação do concreto à tração é não linear e possui um trecho ascendente e outro descendente bem definido.

Hughes e Chapman (1966) usaram máquinas de teste modificadas para obter diagramas tensão-deformação à tração com trechos ascendentes e descendentes similares aos obtidos em compressão. A relação tensão-deformação do concreto à tração em estruturas de concreto armado fissurada é diferente da relação tensão-deformação do concreto sem armadura, em princípio devido à aderência do concreto com o aço.

Mörsch (1909) mostrou que a parte do concreto entre duas fissuras é capaz de suportar forças de tração e que a rigidez do concreto armado entre as fissuras é maior que a rigidez da barra de aço da armadura isolada.

3.2.1 Relação constitutiva do concreto à compressão

A relação tensão-deformação do concreto apresenta um comportamento praticamente linear até 30% da resistência à compressão aproximadamente. Este comportamento é seguido por uma redução gradual até o valor da resistência máxima à compressão, quando a rigidez do material se reduz a zero. A partir deste ponto a relação tensão-deformação do concreto passa a exibir uma redução gradual até o ponto onde a ruptura por esmagamento acontece.

Diversos modelos constitutivos são apresentados na literatura para tentar capturar o comportamento do concreto submetido à compressão uniaxial. Entre estes modelos podem ser citados os modelos propostos por Hognestad (1951), Saenz (1964), Popovics (1970), Wang *et al.* (1978), Tsai (1988) e Balan *et al.* (1997).

Embora um grande número de expressões empíricas para a curva tensão-deformação tenham sido propostas, a maioria não representa

completamente o comportamento do concreto para o completo espectro de tipos de concreto e condições de teste.

Conforme Carreira e Chu (1985), encontrar uma relação geral para a curva tensão-deformação do concreto à compressão é bastante complicado porque os parâmetros que definem a relação não são propriedades intrínsecas do concreto, pois dependem das condições do teste, especialmente da taxa de deformação.

Na Tabela 2 são apresentadas algumas das leis constitutivas do concreto à compressão presentes na literatura.

Nesta tese será utilizado o modelo proposto por Carreira e Chu (1985), para a relação constitutiva do concreto à compressão, sendo adotada a equação abaixo, eq.(11), com o parâmetro β_c calculado com a eq.(12), o qual é função da resistência do concreto a compressão f'_c (em MPa). Esta equação geral foi proposta para representar a relação completa do concreto não confinado à compressão.

$$\frac{f_c}{f'_c} = \frac{\beta_c (\varepsilon/\varepsilon'_c)}{\beta_c - 1 + (\varepsilon/\varepsilon'_c)^{\beta_c}} \quad (11)$$

e

$$\beta_c = \frac{1}{1 - \frac{f'_c}{\varepsilon'_c E_t}} \quad (12)$$

onde:

β_c é um parâmetro material que depende da forma do diagrama tensão-deformação.

f'_c é a tensão máxima, usualmente considerada como a resistência à compressão do concreto.

ε'_c é a deformação correspondente à tensão máxima f'_c . O valor adotado será o proposto por Carreira e Chu (1985), dado por $\varepsilon'_c = (0,71f'_c + 1,68)^{-5}$.

E_t é módulo de elasticidade do concreto inicial tangencial.

As equações (11) e (12) são definidas em termos de três parâmetros apenas: f'_c , ε'_c e β_c . Estes parâmetros podem ser determinados por meio de testes de compressão com a taxa de deformação controlada. Para fins de projeto uma tensão de deformação última ε_u é especificada para estabelecer um limite de ruptura para o concreto. Neste trabalho o valor limite para ε_u será de 0.0035 (3,5%).

As equações propostas por Desayi e Krishnan, (1964) e Todeschini *et al.*, (1964) são casos particulares das equações (11) e (12) quando $\beta_c = 2$.

Tabela 2 – Relação constitutiva do concreto a compressão – formulação na literatura

Lei	Parâmetros (MPa)
$f_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right]$ <p>(HOGNESTAD, 1951)</p>	$\varepsilon_{c0} = 0.002$
$f_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\frac{K f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) + B \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^3} \text{ para } 0 \leq \varepsilon_0$ <p>(SAENZ, 1964)</p>	$A = C + K - 2$ $B = 1 - 2C \quad E_{cs} = \frac{f_c}{\varepsilon_{c0}}$ $C = K \frac{(K_\sigma - 1)}{(K_\varepsilon - 1)^2} - \frac{1}{K_\varepsilon}$ $K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{c0}} \quad K = \frac{E_c}{E_{sec}} \quad K_\sigma = \frac{f_c}{f_r}$
$f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{\beta_c}{\beta_c - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^{\beta_c}}$	$\beta = 2$ (DESAYI e KRISHNAN, 1964, TODESCHINI <i>et al.</i> , 1964)
	$\beta = 3$ (SINHA <i>et al.</i> , 1964)
	$\beta_c = \frac{E_c}{E_c - E_{cs}} \quad E_{cs} = \frac{f_c}{\varepsilon_c}$ (POPOVICS, 1973)
	$\beta_c = \left(\frac{f_c}{32,4} \right)^3 + 1,55$ (DOMINGO e CARREIRA, 1985)
$f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{n}{n - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^{nk}} \text{ para } \varepsilon \geq \varepsilon_0$ <p>(THORENFELT <i>et al.</i>, 1987)</p>	$n = 0,8 + \frac{f_c}{17}$ $k = 0 \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c0}$ $k = 0,67 + \frac{f_c}{64} \text{ para } \varepsilon \leq \varepsilon_{c0}$

$f_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^n} \text{ para } \varepsilon \geq \varepsilon_0$ <p>(MANDER <i>et al.</i>, 1988)</p>	$n = \frac{E_c}{E_c - E_{cs}}$ $E_{cs} = \frac{f_c}{\varepsilon_{c0}}$ $E_c = 5000 \sqrt{f_c}$
$f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^n} \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\frac{K f_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)}{1 + A \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right) + B \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^3} \text{ para } \varepsilon \geq \varepsilon_0$ <p>(KWON e SPACONE, 2002)</p>	$f_r = \frac{f_c f'_c}{5 f'_c - f_c} \leq 1,4 f_c$ $\varepsilon_{cr} = 4 \varepsilon_{c0}$

O projeto de estruturas de concreto é baseado em ensaios de corpos de prova padrões cilíndricos com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura. Carreira e Chu (1985) apresentaram quatro diferentes procedimentos para a determinação do valor de β_c , dependendo da informação que o projetista tem disponível.

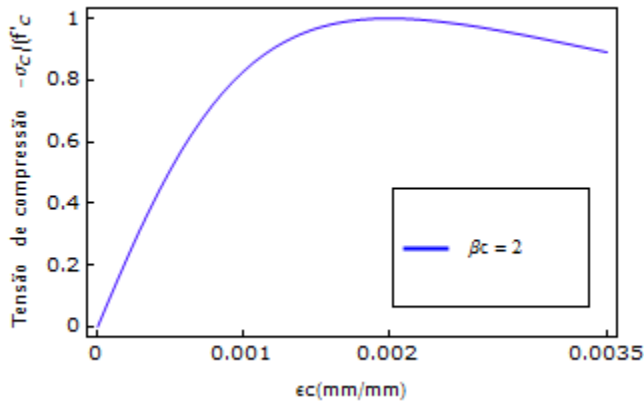


Figura 6 - Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão, para $\beta_c = 2$.

A partir da resistência à compressão do concreto, que é o parâmetro mais adotado em projeto, o valor de β_c pode ser estimado por:

$$\beta_c = \left[\frac{f'_c}{32,4} \right]^3 + 1,55 \quad \text{para } f'_c \text{ em MPa} \quad (13)$$

A Figura 6 apresenta um diagrama tensão-deformação do concreto à compressão de acordo com a eq.(11) e com $\beta_c = 2$.

A Figura 7 apresenta diagramas para a relação tensão-deformação do concreto calculados pela eq.(11), com diversos valores de β_c .

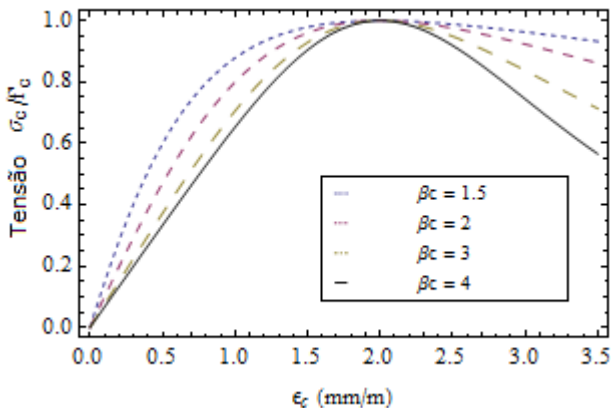


Figura 7 - Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão, para valores de β_c variando de 1,5 a 4.

3.2.2 Relação constitutiva do concreto à tração

O concreto submetido à tração apresenta uma resposta praticamente linear até o início da fissuração, que ocorre ao ser atingida a sua resistência à tração. O seu comportamento na ruptura é muito mais frágil do que na compressão, sendo o ramo descendente da curva tensão-deformação bem mais íngreme, caindo rapidamente para zero.

A descrição da curva tensão-deformação é usualmente feita com os conceitos da Mecânica da Fratura, utilizando a energia de deformação para a definição do amolecimento que ocorre após a ruptura.

Já para o concreto armado, o comportamento é diferente do concreto simples. Após o início da fissuração, o concreto tracionado entre fissuras ainda colabora na resistência do elemento, devido à transferência de tensões causada pela aderência entre o aço e o concreto (*tension-stiffening*). Há 100 anos, Mörsch (1909) demonstrou que o concreto entre duas fissuras consecutivas era capaz de suportar tensões de tração e que a rigidez do concreto entre as fissuras era maior do que a rigidez do concreto isolado.

3.2.3 Contribuição do concreto tracionado entre fissuras

A rigidez à flexão de vigas de concreto armado submetido às cargas de serviço é consideravelmente menor do que a rigidez calculada com base na seção homogênea, devido à fissuração do concreto. Por outro lado, a rigidez é significativamente maior do que aquela calculada desconsiderando-se a resistência à tração do concreto. Isto é, mesmo após a fissuração, os trechos de concreto entre as fissuras ainda são capazes de resistir às forças de tração induzidas devido à aderência entre o concreto e a armadura, aumentando a rigidez à flexão do elemento bem acima daquela produzida pela armadura de aço isolada. Este fenômeno é bastante pronunciado em vigas de concreto armado (e.g. KELVIN e BISCHOFF, 2005).

Em vigas e lajes de concreto armado com quantidades de armadura próximas do valor mínimo, a rigidez a flexão das seções totalmente fissuradas é bem inferior à rigidez das seções não fissuradas e o enrijecimento do concreto à tração entre as fissuras contribui significativamente para a rigidez, após a fissuração.

O efeito *tension stiffening* em barras tracionadas de concreto armado, pode ser medido por meio da diferença entre a resposta da barra isolada e a resposta da barra tracionada. Esta diferença fornece uma resposta da carga média resistida pelo concreto, conforme mostrado na Figura 8. Em vigas ou lajes de concreto armado, na resposta carga-deslocamento, o mesmo fenômeno também pode ser observado, como mostrado na Figura 3.

Para cargas menores do que a carga equivalente ao momento crítico de fissuração, o elemento não está fissurado e possui comportamento elástico e linear. Após a carga crítica P_{cr} acontece uma mudança brusca na rigidez a flexão na região da primeira fissura, mas a maior parte das seções permanecem sem fissuras. Com o aumento da carga, mais fissuras são formadas e a rigidez a flexão média de todo o elemento diminui.

Existe uma ampla proposta de métodos para a consideração do efeito de *tension-stiffening*, baseados em formulações deduzidas a partir de procedimentos distintos,

- 1) mecanismo de *bond-slip*,
- 2) modificações das leis constitutivas,
- 3) áreas equivalentes,
- 4) inércias seccional ou global equivalente,
- 5) diagramas seccionais Momento-Curvatura.

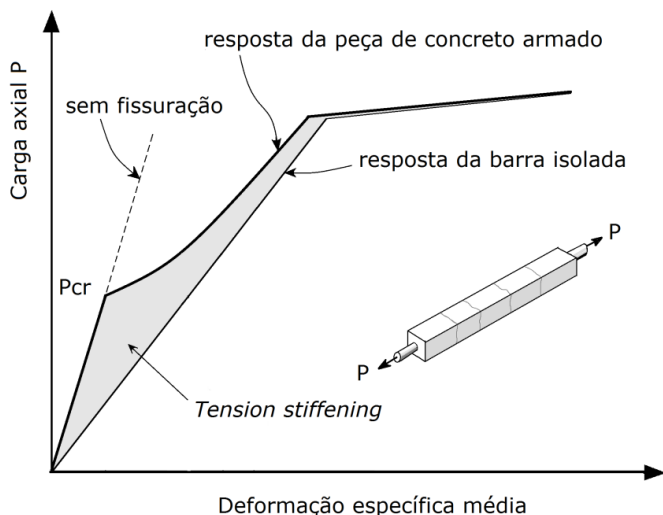


Figura 8 - Resposta de uma barra de concreto tracionada. Fonte: Adaptado de Bischoff (2005).

Diversos modelos de aderência e deslizamento (*bond-slip*) baseados no comportamento de aderência e deslizamento na interface entre o aço e o concreto têm sido desenvolvidos e podem ser vistos nos trabalhos de Floegl e Mang (1982), Choi e Cheung (1996).

Para considerar o efeito de *tension-stiffening*, a maioria dos modelos de análise atualmente usa o conceito de fissuras distribuídas (*smearred cracking model*), no qual uma fissuração progressiva é admitida como estando distribuída totalmente em um elemento ou nos pontos de integração dentro do elemento. Este modelo se contrapõe ao modelo de fissuras discretas que representa as fissuras individualmente e exige maior esforço computacional, Figura 9.

No modelo de fissuras distribuídas, o efeito de *tension-stiffening* é modelado pelo trecho descendente na relação tensão-deformação à tração do concreto, como mostrado na Figura 10

Usualmente o efeito de enrijecimento à tração do concreto entre fissuras (*tension-stiffening*) tem sido representado de duas maneiras:

- 1) Modificação da lei constitutiva do concreto tracionado, Figura 10, modelo introduzido por Scanlon (1971) e usado por Scanlon e Murray(1974), Lin e Scordelis (1975),

Gilbert e Warner (1978), Danjanice Owen (1984), Bazant e Oh (1984), Figueiras (1986), Carreira e Chu (1986).

- 2) Modificação da lei constitutiva do aço tracionado, proposta por Gilbert e Warner (1978), Bridge e Smith (1982).

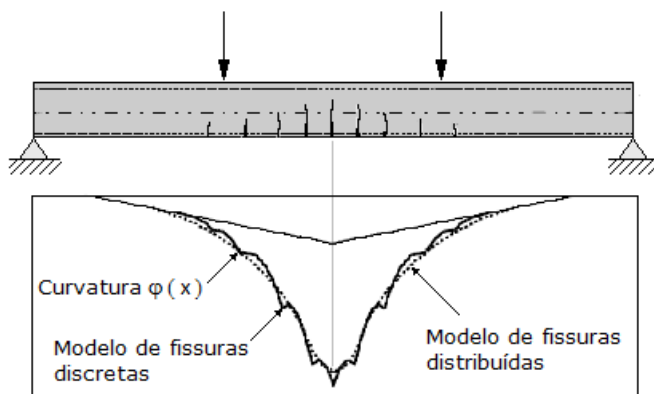


Figura 9 - Modelo de fissuras distribuídas e de fissuras discretas.

Outros modelos são baseados na incorporação de uma área fictícia de concreto ao redor da armadura, como o proposto por Cauvin (1978), Gilbert (1999), Clark e Speirs (1978), Rao e Subrahmanyam (1973), Bazant e Oh (1984). Belarbie e Hsu (1994) utilizam uma combinação de ambas, uma modificação na lei constitutiva do aço e do concreto tracionados.

Stramandinoli e La Rovere (2008) apresentaram um modelo para o *tension-stiffening* com uma relação tensão-deformação do concreto que possui um trecho descendente exponencial na região de fissuração.

Neste trabalho será usado um procedimento numérico baseado no modelo de fissuras distribuídas, mostrado na Figura 10 (*smearred cracking model*), onde o efeito da colaboração do concreto entre fissuras é representado por uma curva decrescente que relaciona a tensão e a deformação média à tração no concreto.

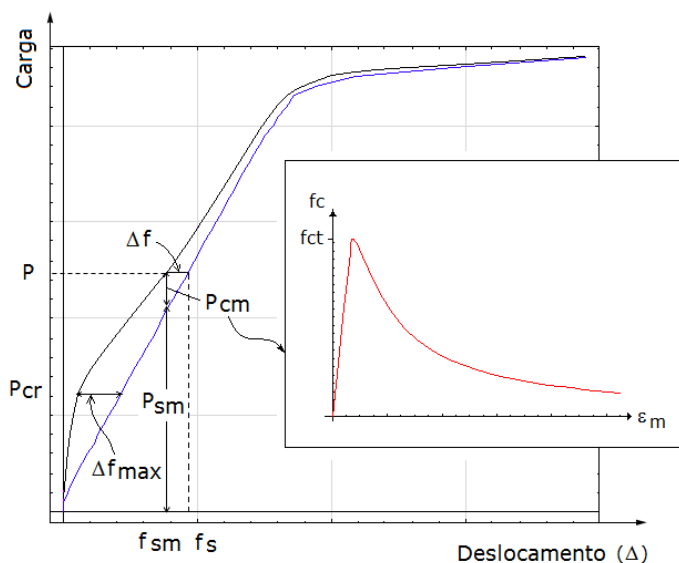


Figura 10 - Diagrama de resposta Carga-Flecha com modificação na lei constitutiva do concreto tracionado. Fonte: Adaptado de Fields e Bischoff, (2004).

Na Figura 11 são mostradas algumas das inúmeras propostas de modificação do diagrama constitutivo do concreto tracionado.

Poucos modelos propostos por pesquisadores têm incluído todos os parâmetros que afetam o "*tension stiffening*".

Conforme Prakhya e Morley (1990), o formato do trecho descendente na relação constitutiva do concreto à tração é de extrema importância. A simples consideração de um trecho linear no ramo descendente, como proposto por Bazant e Oh (1984), não garante necessariamente resultados satisfatórios para o modelo. Carreira e Chu (1986) afirmaram que um trecho descendente bem calibrado aumenta a precisão do modelo de cálculo das flechas em vigas e lajes.

Conforme Prakhya e Morley (1990) está bem estabelecido que para o concreto armado o efeito de *tension-stiffening* é dependente da taxa de armadura, do diâmetro das barras da armadura, da tensão de aderência, da resistência do concreto e da distribuição das armaduras.

Trabalhos recentes também tem apresentado propostas para a relação tensão-deformação onde a taxa de armadura é incluída, como em Muñoz (2010).

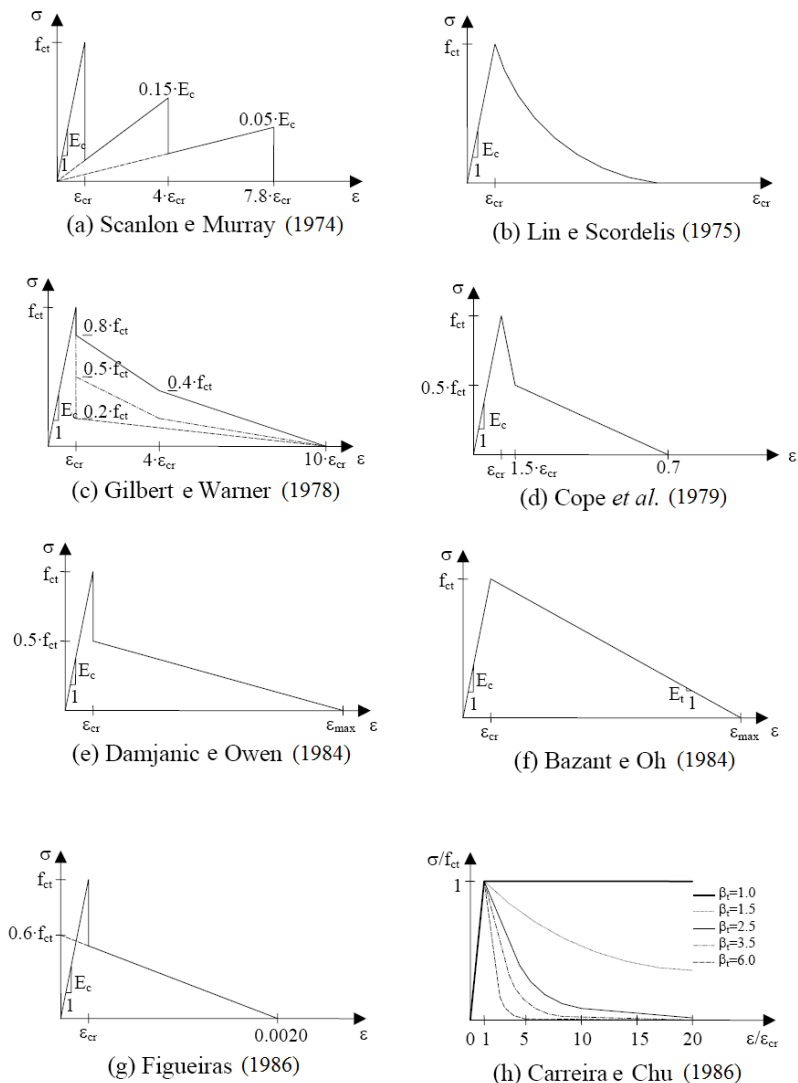


Figura 11 - Modificação da lei constitutiva do concreto tracionado.

Fonte: Adaptado de LLINÁS, 2001).

Outra quantidade importante é a deformação máxima do concreto à tração ϵ_{tmax} (ϵ_{tf}) a partir da qual não resta nenhum efeito significativo de *tension-stiffening*.

Conforme Kaklauskas e Ghaboussi (2001), este parâmetro que controla o *tension-stiffening*, afeta significativamente a relação momento-curvatura das seções de concreto, especialmente nos estágios iniciais de fissuração das seções com taxas de armadura baixas.

Este parâmetro pode ser definido, como mostrado por Prakhya e Morley (1990), por um coeficiente (α), por meio da seguinte expressão:

$$\epsilon_{tmax} = \alpha \epsilon_{tp} \quad (14)$$

Diferentes valores de α tem sido propostos por vários pesquisadores. Damjanic e Owen (1984) propuseram valores entre 5 e 10 para fissuras do tipo cisalhamento e 20 a 25 para fissuras de flexão. Bazant e Oh (1984) sugeriram um valor igual a:

$$\alpha = \frac{E_{ci}}{E_t} + 1 \quad (15)$$

onde E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto (em MPa)

$$E_t = \frac{0.483 E_{ci}}{0.393 + f'_t} \quad (16)$$

Neste trabalho será utilizada a expressão proposta por Kaklauskas e Ghaboussi (2001) para o coeficiente α :

$$\alpha = 7,12 \rho^2 - 27,6\rho + 32,8 \quad (\alpha = 2 \text{ para } \rho \geq 2\%) \quad (17)$$

onde ρ é a taxa de armadura tracionada.

Prakhya e Morley (1990) analisaram os ensaios de Willians (1986) de tração direta feitos em elementos de concreto armado de seção retangular para relacionar a tensão de tração de pós-fissuração com as variáveis investigadas nos ensaios.

Estes elementos tinham 250 cm de comprimento e 25 x 150 cm de seção. As variáveis estudadas foram a taxa de armadura, o diâmetro das barras e o cobrimento de concreto.

A Figura 12 apresenta um destes resultados de ensaio, com quatro elementos de mesma taxa de armadura ($\rho = 1\%$), e quatro barras de diâmetros diferentes (32 Φ 12 mm, 18 Φ 16 mm, 8 Φ 25mm e 12 Φ 20mm), com áreas totais de seção transversal iguais a 3619 mm², 3619 mm², 3926 mm² e 3769 mm² e área superficial de 1206 mm²/mm, 905 mm²/mm, 628 mm²/mm e 754 mm²/mm, respectivamente.

Os testes mostraram que mesmo para a deformação correspondente à tensão de escoamento do aço, o concreto apresentou 20 a 55 por cento da sua resistência à tração.

Como pode ser observado na Figura 12, para a mesma taxa de armadura a parte descendente da curva efetiva tensão–deformação do concreto à tração parece depender do diâmetro da barra e da área superficial da barra. Na Figura 12 a quantidade entre parênteses indica a área superficial das barras por unidade de comprimento.

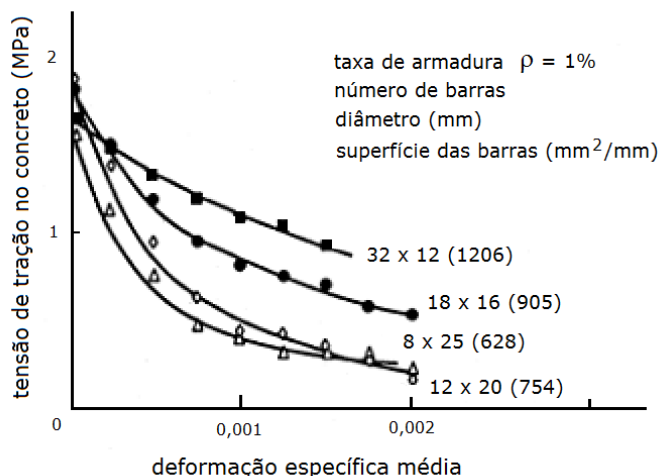


Figura 12 - Ensaio de tração direta em elementos de concreto armado.
 Fonte: Adaptado de Prakhya e Morley (1990).

O formato do trecho descendente da curva tensão–deformação à tração do concreto é definido por uma curva de decaimento com um coeficiente denominado β_t .

Prakhya e Morley (1990) também analisaram os resultados de ensaios experimentais em flexão realizados por Clark e Speirs (1978) e Clark e Cranston (1979) e apresentaram uma fórmula para o cálculo de β_t dependente de diversos parâmetros da armadura:

$$\beta_t = (\rho_t)^{x_1} \cdot (S_L \cdot c)^{-x_2} \cdot \left(\frac{c}{s}\right)^{x_3} \quad (18)$$

onde:

$$\rho_t = \frac{100 A_s}{b(h - x_{nt})} \quad (19)$$

e x_{nt} é a profundidade da linha neutra desprezando-se a tração no concreto, A_s é a armadura tracionada, b a largura da seção, h é a altura total da seção, c o cobrimento de concreto da armadura tracionada, S_L é

a área superficial específica da armadura na região tracionada e s o espaçamento entre as armaduras.

Com os resultados dos testes de Clark e Speirs (1978) e por meio de uma regressão linear múltipla, Prakhya e Morley (1990) obtiveram os seguintes valores para os coeficientes $x_1 = 0.3660$, $x_2 = 0.3436$, $x_3 = 0.1460$ da eq. (18). Segundo os autores, apesar do ajuste não apresentar bons índices de correlação, ele é adequado para se obter valores práticos para β_t .

Estes mesmos autores sugeriram utilizar a relação tensão-deformação proposta por Carreira e Chu (1986), com o parâmetro β_t calculado com a eq. (18).

$$f_t = \begin{cases} f'_t \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} \right) & \text{para } \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} \leq 1 \\ \frac{\beta_t f'_t \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} \right)}{\beta_t - 1 + \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} \right)^{\beta_t}} & \text{para } \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} > 1 \end{cases} \quad (20)$$

onde ε'_t é a deformação correspondente à tensão máxima f'_t e. A primeira expressão na eq. (20) corresponde a um comportamento linear até a fissuração e a segunda expressão descreve o trecho descendente da relação tensão-deformação do concreto à tração do elemento de concreto armado. A deformação específica máxima do concreto à tração ε_{tmax} , após a qual não resta nenhum enrijecimento à tração significativo será calculada pela eq. (14), com o valor de α calculado com a Eq.(17) proposta por Kaklauskas e Ghaboussi (2001).

Na Figura 13 estão traçados, como exemplo, quatro diagramas de tensão-deformação a tração de um concreto para valores de β_t entre 1,5 e 4. Para um comportamento perfeitamente plástico pode-se usar $\beta_t = 1$ e valores bem elevados de β_t resultam em uma queda brusca da resistência à tração. Os diagramas foram gerados com um valor máximo de ε_{tmax} , calculado pela Eq.(14) e com um valor de α calculado com a Eq.(17) para uma taxa de armadura ρ igual a 0,5 %.

Na Figura 14 é apresentado um gráfico com a relação entre β_t e a taxa de armadura ρ para valores constantes do cobrimento c , o do espaçamento entre barras s . Pode-se observar que o valor de β_t aumenta com o aumento da taxa de armadura e diminui com o aumento do cobrimento da armadura e também é dependente do cobrimento c .

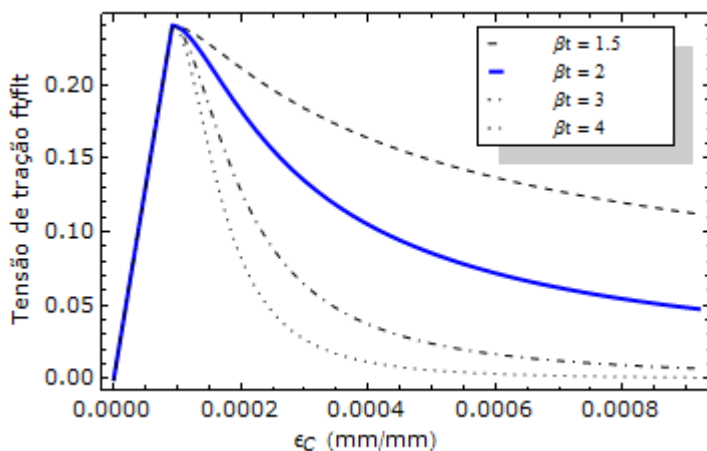


Figura 13 - Diagrama tensão-deformação do concreto à tração, para valores de β_t variando de 1,5 a 4.

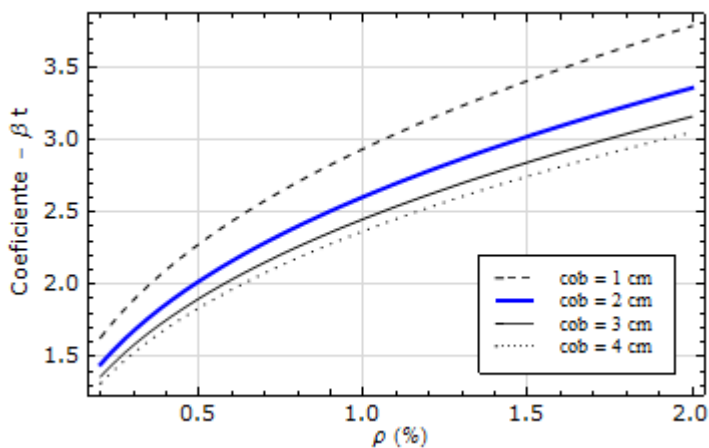


Figura 14 - Relação entre β_t e a taxa de armadura ρ para um valor de $s = 2$ cm e cobrimentos de concreto de 1 a 4 cm.

Na Figura 15 é apresentado um gráfico com a relação entre β_t e a taxa de armadura para valores constantes do espaçamento entre barras. O valor de β_t aumenta com o aumento da taxa de armadura e diminui com o aumento do espaçamento s entre as barras da armadura.

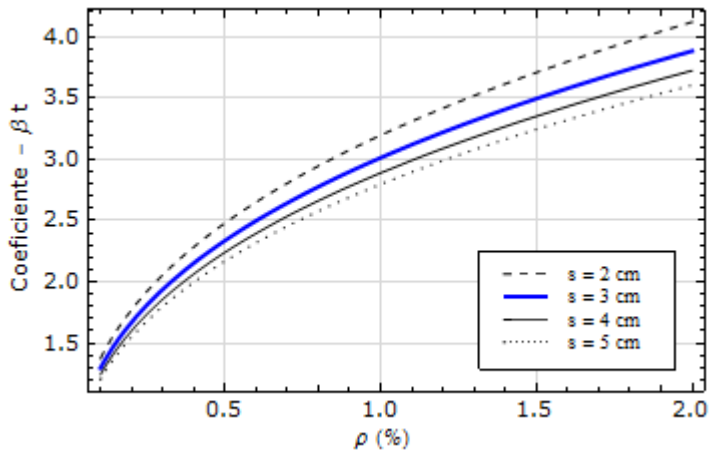


Figura 15 - Relação entre β_t e a taxa de armadura ρ para um valor de cobrimento de 2 cm e espaçamento entre barras s de 2 a 5 cm.

Na Figura 16 é apresentado um gráfico com a relação entre β_t e o cobrimento de concreto da armadura para valores constantes de taxa de armadura e para um espaçamento entre barras fixo de 2 cm. Neste caso o valor de β_t diminui com o aumento do cobrimento.

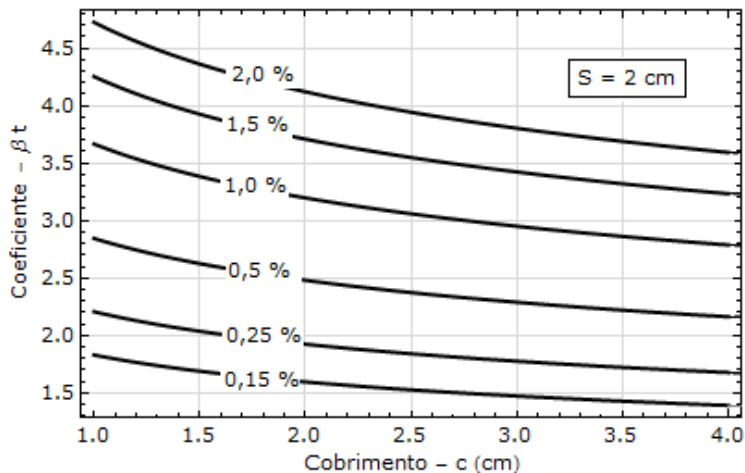


Figura 16 - Relação entre β_t e o cobrimento da armadura c para valores constantes de taxa de armadura ρ e o espaçamento entre barras s de 2 cm.

Conforme Kaklauskas e Ghaboussi (2001), os dados experimentais em que se baseavam o modelo proposto por Prakhya e Morley (1990) não cobriam os casos de taxas de armaduras baixas e faltava uma melhor justificativa estatística. Kaklauskas e Ghaboussi (2001) desenvolveram um método para determinar a relação tensão-deformação média, a partir de diagramas de momento-curvatura experimentais de vigas de concreto submetidas a cargas de curta duração.

É importante destacar, que muitos trabalhos sobre o efeito de *tension stiffening* desprezam os efeitos da retração, o qual pode gerar tensões de tração significativas no concreto, especialmente em elementos de concreto com taxas de armadura altas.

Um exemplo do diagrama completo do concreto à tração e a compressão adotado neste trabalho, com o uso das eq.(11) e (20), é mostrado na Figura 17. Este diagrama foi gerado com a função $\sigma_c(\epsilon_c)$ escrita no programa *Mathematica*.

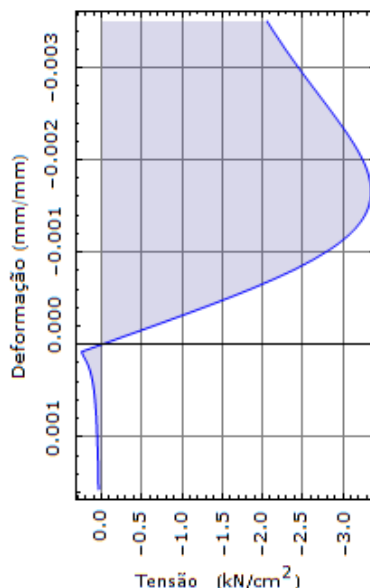


Figura 17 – Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão e a tração.

Com o objetivo de avaliar a importância do coeficiente β_t no formato do trecho descendente da relação constitutiva do concreto à tração e o comportamento do modelo implementado, foram feitas

diversas simulações com as mesmas vigas usadas na verificação do modelo mecânico implementado, conforme apresentado no Capítulo 5.

Na Figura 18 é apresentado o resultado de uma destas simulações com as vigas VT1 e VT2 dos ensaios de Beber (1999) (ver item 5.2.2), com valores do coeficiente β_t , variando de 1,0 a 3,0. Como pode-se observar nos resultados das curvas carga-deslocamento mostradas na Figura 18, após o trecho elástico a influência do parâmetro β_t é bastante significativa. Os valores de β_t calculados pela Eq. (18), usados no modelo mecânico implementado, variaram de 2,09 a 2,06 e como pode ser observado, a curva carga-deslocamento neste caso está em excelente concordância com os resultados dos ensaios. A curva carga-deslocamento para $\beta_t = 3,0$ apresenta um comportamento praticamente com ausência de *tension-stiffening*, acima do trecho elástico.

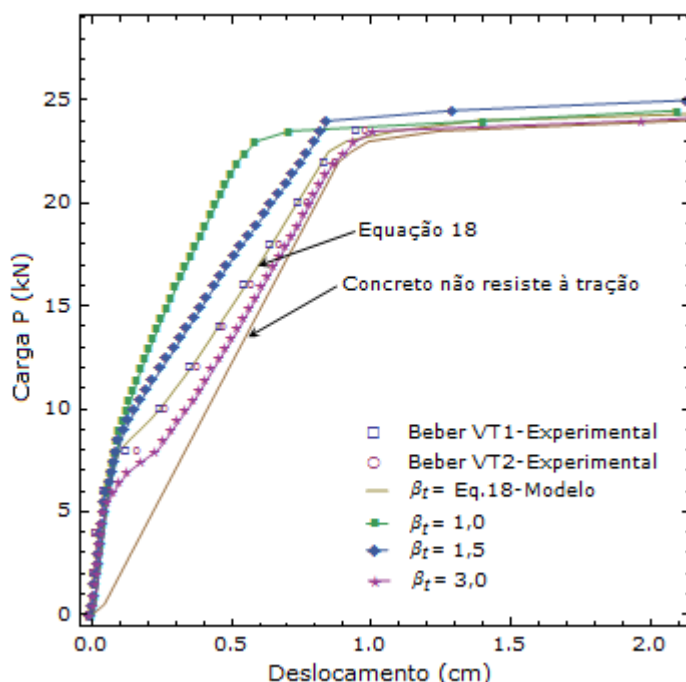


Figura 18 – Vigas VT1 e VT2 - Beber (1999) e modelo implementado calculado com diversos valores de β_t constantes e com β_t calculado pela Eq.(18).

Verificou-se que os valores de β_t calculados pela eq. (18) são de fundamental importância para a precisão dos resultados ao longo de

todo o digrama carga-deslocamento. Valores constantes de β_i calculados em função apenas dos parâmetros do concreto, como em Carreira e Chu (1986), não levam a bons resultados.

É importante destacar que neste modelo implementado o valor de β_i é calculado para cada posição da linha neutra no procedimento incremental de construção do diagrama momento-curvatura apresentada no item 3.2.5.

3.2.4 Lei constitutiva do aço para armadura de concreto

O aço da armadura longitudinal e transversal das vigas é composto de barras laminadas e deformadas de aço carbono destinadas ao concreto armado. A NBR 7480 (1996) - Barras e Fios de Aço destinados a Armaduras para Concreto Armado classifica como barras os produtos de bitola (diâmetro em milímetros da seção transversal nominal) 5 ou superior obtidos por laminação a quente ou laminação a quente e encruamento a frio (Classe A), e como fios os de bitola 10 mm ou inferior, obtidas por trefilação ou processo equivalente (Classe B).

3.2.4.1 Aço Classe A

Também são conhecidos como aços de dureza natural, e possuem como tratamento a laminação a quente. Segundo a NBR 7480 (1996), estão classificados nesta categoria os aços CA-25 e CA-50. O que os difere é sua composição química, aumentando com isto sua resistência mecânica.

São considerados como de alta ductilidade os aços que atendem aos valores mínimos de f_{yk}/f_{stk} e ϵ_{uk} indicados na NBR 7480 (1996). Os aços classe A têm escoamento caracterizado pela presença de patamar no diagrama tensão-deformação, conforme mostrado na Figura 19, e propriedades mecânicas especificadas na Tabela 3 pela NBR 7480 (1996).

3.2.4.2 Aço Classe B

São barras ou fios encruados a frio por tração. Estes aços inicialmente sofrem o processo de laminação a quente, sendo submetidos a seguir a uma trefilação a frio, onde ocorrerá modificação interna com deformação dos grãos deste material, resultando em um aumento de sua resistência. Segundo a NBR 7480(1996), está classificado nesta categoria o aço CA-60B.

Os aços que atendem aos valores mínimos de f_{yk}/f_{stk} e ϵ_{uk} indicados na NBR 7480(1996) podem ser considerados como de ductilidade normal. Os aços classe B não possuem patamar de

escoamento caracterizado no diagrama tensão-deformação. Adota-se como limite de escoamento elástico a tensão que produz uma deformação remanescente de 0,002 (2‰), conforme mostrado na Figura 19a e propriedades mecânicas referentes na Tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas de barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado

Categoria	Ensaio de tração (valores mínimos)		
	Resistência característica de escoamento f_y (MPa)	Limite de resistência f_{su} (MPa)	Alongamento em 10ϕ (%)
CA-25	250	$1,20 f_y$	18
CA-50	500	$1,10 f_y$	8
CA-60B	600	$1,05 f_y$	5

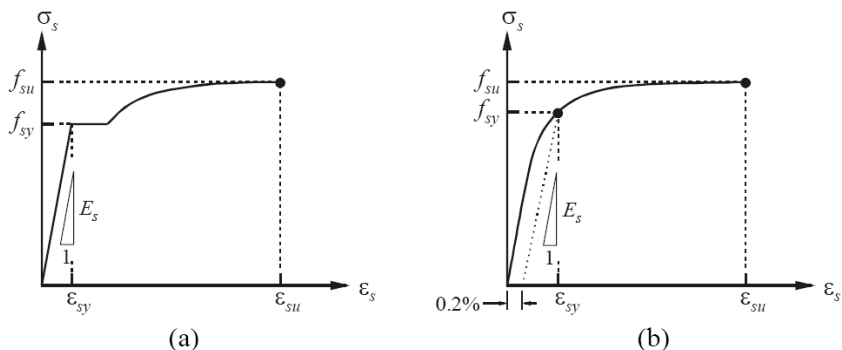


Figura 19 - Curvas tensão-deformação para o aço da armadura: (a) aço de dureza natural (CA-50); (b) aço encruado a frio (CA60). Fonte: Adaptado de Chong (2004).

Para aços com patamar de escoamento, Buchaim (2002) recomenda a formulação de Shima, Chou e Okamura (1987):

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad \text{para } \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \quad (21)$$

$$\sigma_s = f_y \quad \text{para } \epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sh} \quad (22)$$

$$\sigma_s = f_y + (f_t - f_y) \left(1 - e^{\left[-\frac{\epsilon_s - \epsilon_{sh}}{k} \right]} \right) \cdot 1,01 \quad \text{para } \epsilon_s \leq \epsilon_{sh} \quad (23)$$

$$k = 0,028 \left[\frac{\epsilon_{su} - \epsilon_{sh}}{0,16 - \epsilon_{sh}} \right] \quad (24)$$

Outro modelo simples para a relação tensão-deformação do aço foi desenvolvido por Esmaeily e Xiao (2005), este modelo com quatro parâmetros, K_1 , K_2 , K_3 , e K_4 , pode ser usado para simular o comportamento de diversos tipos de aço, Figura 20.

Os parâmetros são os seguintes:

- 1) K_1 é a razão entre a deformação no início do enrijecimento à tração ou encruamento (*strain hardening*) e a deformação no escoamento;
- 2) K_2 é a razão entre a deformação de pico em relação à tensão de escoamento.
- 3) K_3 é a razão entre a deformação última em relação à deformação no escoamento;
- 4) K_4 é a razão entre a tensão de pico em relação à tensão de escoamento.

Uma curva quadrática une os pontos no início do *strain hardening*, a tensão de pico e o ponto de ruptura. A formulação matemática desta parte do modelo para, $K_1\epsilon_y \leq |\epsilon| \leq K_3\epsilon_y$, é a seguinte:

$$\sigma_s = \frac{E_s(1 - K_4)(\epsilon^2 + 2 K_2(K_4 - 1)E_s\epsilon + E_s\epsilon_y(K_1^2 K_4 - 2 K_1 K_2 K_4 + K_2^2))\epsilon}{\epsilon_y\epsilon(K_1^2 - 2 K_1 K_2 + K_2^2)} \quad (25)$$

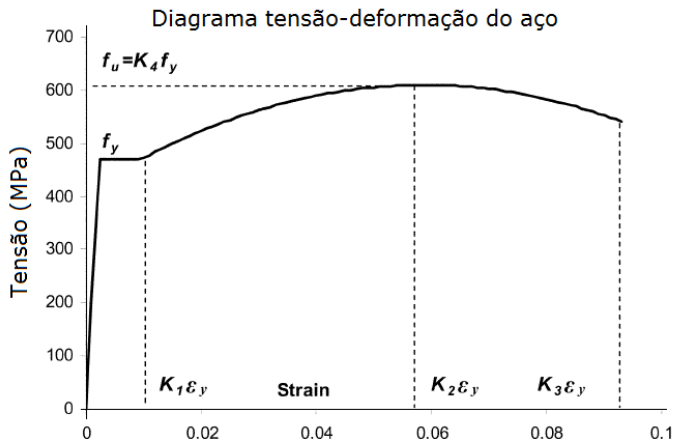


Figura 20 - Modelo de diagrama tensão-deformação do aço. Fonte: Adaptado de Esmaeily e Xiao (2005).

Este modelo será adotado para a definição da lei constitutiva do aço no modelo mecânico de viga de concreto armado deste trabalho.

Um exemplo de valores para os parâmetros K conforme Esmaily e Xiao são: $K_1 = 4.0$; $K_2 = 25.0$; $K_3 = 40.0$ e $K_4 = 1.3$.

A Figura 21 apresenta o diagrama do aço CA 50 obtido com o modelo de Esmaily e Xiao (2005), o qual será usado no modelo mecânico para as vigas e lajes de concreto armado deste trabalho com os valores dos coeficientes K_1 , K_2 , K_3 e K_4 citados acima.

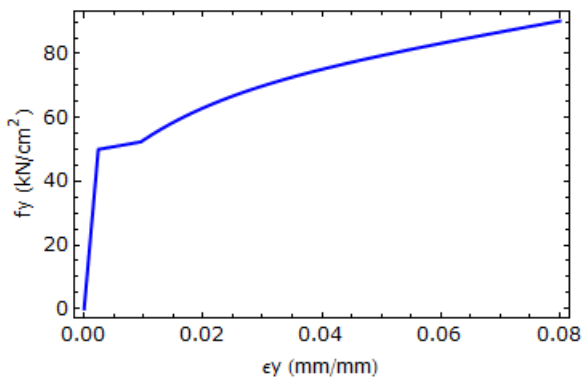


Figura 21 - Diagrama tensão-deformação para o aço CA-50.

3.2.5 Determinação da Relação Momento-Curvatura

Segundo Pereira (2009), a construção de diagramas momento-curvatura mostra-se útil por fornecer informações importantes sobre o comportamento da seção transversal e serve de apoio para a análise dos resultados de uma análise não linear.

A análise não linear de vigas de concreto armado pode ser realizada com o uso da relação momento-curvatura para levar em conta o comportamento não linear das seções transversais.

A curvatura $1/r$ representando o gradiente do diagrama de deformações em uma seção pode ser calculada pela teoria clássica de vigas se as deformações forem medidas com o incremento do momento fletor até a ruptura. A relação momento-curvatura de uma seção é determinada de forma única de acordo com as dimensões da seção de concreto e das propriedades do concreto e do aço, usando as equações de equilíbrio e compatibilidade de deformações ao longo da seção transversal. Além disso, o gradiente da relação momento-curvatura representa a rigidez elástica secante (EI_{sec}), a qual inclui todas as propriedades da seção em uma condição típica de carregamento.

A rigidez efetiva ($E_c I_e$) pode ser usada em uma análise não linear.

Na determinação da curva momento-curvatura teórica para uma seção de concreto armado submetida à flexão, as hipóteses básicas da teoria de Bernoulli-Euler ou teoria clássica de vigas para vigas planas serão admitidas:

- 1) Simetria plana: O eixo longitudinal é reto, e a seção transversal da viga tem um eixo e um plano longitudinal de simetria. A resultante das cargas transversais que atuam em cada seção está neste plano.
- 2) Ortogonalidade: As seções originalmente planas ao eixo longitudinal permanecem planas e ortogonais ao eixo longitudinal deformado após a flexão da viga.

Além disso, é admitido que as deformações médias no concreto em uma determinada camada são iguais à deformação média no aço, ou seja, admite-se a hipótese de não deslizamento da ancoragem do aço no concreto.

Neste trabalho o procedimento numérico usado para o cálculo da relação momento-curvatura é similar ao apresentado por Bazant e Oh (1984), com a relação constitutiva do concreto à compressão proposta por Carreira e Chu (1985), e o modelo de *tension-stiffening* proposto por Prakhya e Morley (1990) com o parâmetro β_t calculado pela eq. (18). Para a relação constitutiva do aço, será utilizado o modelo proposto por Esmaily e Xiao (2005).

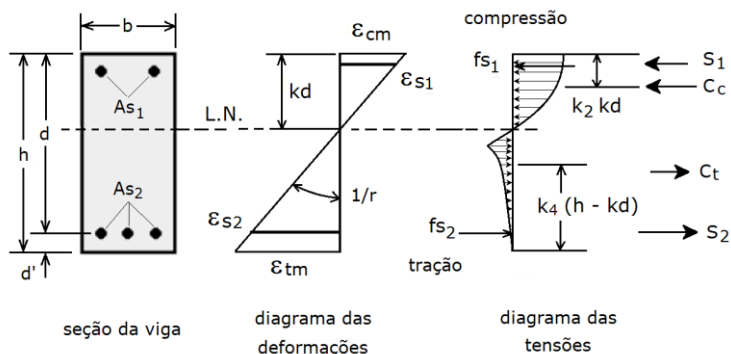


Figura 22 - Distribuição das tensões e deformações na seção transversal das vigas

As dimensões da seção de concreto, as áreas e as posições e o cobrimento de concreto da armadura são considerados quantidades conhecidas. A análise da seção retangular mostrada na Figura 22 é então

desenvolvida para o cálculo da relação momento-curvatura usando-se as condições de compatibilidade de deformações e de equilíbrio das forças.

As áreas das armaduras de compressão e tração são respectivamente A_{S1} e A_{S2} , as deformações são ϵ_{si} (onde $i = 1,2$), as tensões correspondentes são σ_{si} e as forças resultantes nas armaduras $f_{si} = \sigma_{si} A_{si}$. Para uma determinada deformação no concreto na fibra comprimida ϵ_{cm} e uma dada profundidade da linha neutra $k.d$, para que a distribuição de deformações seja linear é necessário que:

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{cm} \frac{k.d - d_i}{k.d} \quad (26)$$

onde a deformação nas armaduras ϵ_{si} segue a lei de tensão-deformação do aço utilizado nas armaduras.

A resultante das tensões de compressão no concreto é calculada por:

$$C_c = k_1 f'_c b k.d \quad (27)$$

onde k_1 é um parâmetro que define a tensão de compressão média, e b é a largura da seção retangular. A resultante atua a uma distância $k_2 k.d$ em relação à face comprimida da seção. Com base na relação tensão-deformação, pode-se escrever:

$$k_1 = \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} \sigma_c d\epsilon_c}{f'_c \epsilon_{cm}} ; k_2 = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{cm}} \epsilon_c \sigma_c d\epsilon_c}{\epsilon_{cm} \int_0^{\epsilon_{cm}} \sigma_c d\epsilon_c} \quad (28)$$

De modo similar, a força resultante das tensões de tração no concreto e a sua distância em relação à face tracionada, conforme mostrado na Figura 22, é obtida com:

$$C_t = k_3 f'_t b(h - k.d); z_1 = k_4 (h - k.d) \quad (29)$$

onde:

$$k_3 = \frac{\int_0^{\epsilon_{tm}} \sigma_c d\epsilon_c}{f'_t \epsilon_{tm}} ; k_4 = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{tm}} \epsilon_c \sigma_c d\epsilon_c}{\epsilon_{tm} \int_0^{\epsilon_{tm}} \sigma_c d\epsilon_c} \quad (30)$$

$$\epsilon_{tm} = \epsilon_{cm} \frac{k.d - d_i}{k.d} \quad (31)$$

onde ϵ_{tm} é a deformação do concreto na face tracionada e h é a altura da seção da viga.

Com a hipótese de que nenhuma força se desenvolve fora do plano da viga, o somatório das forças na direção do eixo longitudinal da viga (eixo x) deverá ser zero. Portanto a força resultante, normal ao plano da seção transversal (plano x - y) da viga é dada por:

$$N_x = \int \sigma_x dA \quad (32)$$

O momento resultante atuando na seção transversal da viga pode ser calculado por:

$$M_x = \int -y\sigma_x dA; M_x = D \frac{1}{r} \quad (33)$$

Onde $1/r$ é a curvatura e D é a rigidez secante material da seção da viga, para o nível de solicitação.

$$N_x = k_1 f'_c b k d + \sum_{i=1}^2 \sigma_{si} A_{si} - k_3 f'_t b (h - k d) \quad (34)$$

$$M_x = k_1 f'_c b k d \left(\frac{h}{2} - k_2 d \right) + \sum_{i=1}^2 \sigma_{si} A_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i \right) + k_3 f'_t b (h - k d) \left[\frac{h}{2} - k_4 (h - k d) \right] \quad (35)$$

N_x é a força resultante normal e M_x é o momento fletor resultante resistente na seção transversal.

Com a posição da linha neutra pode-se calcular então a curvatura correspondente para os esforços N_x e M_x correspondentes.

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{cm}}{k d} \quad (36)$$

O momento M_x pode ser escrito como:

$$M_x = E_c I_e \frac{1}{r} \quad (37)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade do concreto e I_e um momento de inércia efetivo e $1/r$ é a curvatura da seção. Esta equação também pode ser usada para calcular o momento de inércia efetivo I_e quando a relação momento-curvatura da seção for conhecida.

Para calcular a relação momento-curvatura para uma dada força normal N_x , considera-se uma sucessão de valores de deformação do concreto na face comprimida (ε_{cm}) incrementados em valores pequenos $\Delta\varepsilon_{cm}$.

As etapas para o procedimento iterativo podem ser resumidas como:

1. Com um incremento $\Delta\varepsilon_{cm}$ da deformação do concreto na fibra mais comprimida obtêm-se uma deformação $\varepsilon_{cm,i}$.
2. O diagrama completo das deformações no concreto é calculado com a função:

$$\varepsilon(y) = \frac{-(\varepsilon_{cm,i})}{k_i d} y + (\varepsilon_{cm,i}) \quad (38)$$

onde y é a posição de uma fibra na seção de concreto, medida a partir da face superior da seção.

3. As forças resultantes de compressão e tração no concreto são obtidas com a integração do diagrama de tensões do concreto à compressão e à tração, equações (32) e (33). Esta integração é numérica e feita com a função *NIntegrate* do *Mathematica* com o método de Gauss–Kronrod.
4. As forças resultantes de compressão e tração no aço são obtidas com a tensões de tração e compressão obtidas dos diagramas de tensões do aço e as áreas das armaduras.
5. A posição da linha neutra para este incremento é obtida através do cálculo da raiz da equação:

$$k_1 f'_c k d + \sum_{i=1}^2 \sigma_{si} A_{si} - k_3 f'_t b(h - kd) - N_x = 0 \quad (39)$$

onde o coeficiente k da posição da linha neutra é a variável independente. A raiz da função é calculada com a função *FindRoot* do *Mathematica* utilizando o método de Brent. O método de Brent combina o método da bissecção, o método secante e o da interpolação quadrática inversa para a encontrar a raiz de uma função $f(x) = 0$.

6. Com a posição da linha neutra $k_i d$ calculada para este incremento obtém-se a curvatura

$$\left(\frac{1}{r}\right)_i = \frac{\varepsilon_{cm,i}}{k_i d} \quad (40)$$

7. Calcula-se o momento fletor M_x para esta posição da linha neutra com a eq. (35).
8. A deformação ε_y na armadura tracionada é verificada com o valor limite ε_{ylim} , que pode ser configurado como a deformação máxima preconizada pela NBR 6118 (2007), ou seja, 10‰.
9. A deformação do concreto na fibra mais comprimida $\varepsilon_{cm,i}$ é verificada com o valor limite ε_{cd} que pode ser configurado como a deformação máxima preconizada pela NBR 6118 (2007), ou seja, 3,5‰.
10. Se um destes limites é ultrapassado o processo iterativo é interrompido por ter sido atingido um estado limite último e o valor do momento fletor último é obtido,
11. Se nenhum destes limites é ultrapassado o processo iterativo prossegue com um novo incremento $\Delta\varepsilon_{cm}$ da deformação do

concreto na fibra mais comprimida e repete-se os passos de 2 a 10.

12. O diagrama completo momento-curvatura é então obtido para a seção de concreto, de acordo com as dimensões da seção e das propriedades do concreto e do aço.

A equação geral governante para vigas sujeitas a flexão em termos de deslocamento conforme é dada por:

$$E_c I_e \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x) \quad (41)$$

Com $D = E_c I_e$, pode-se também escrever:

$$D \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x) \quad (42)$$

Um diagrama típico momento-curvatura para uma determinada seção de concreto armado é mostrada na Figura 23. O primeiro trecho é elástico e se estende até a fissuração, o segundo trecho se estende até o escoamento do aço, e o terceiro trecho até a ruptura do concreto.

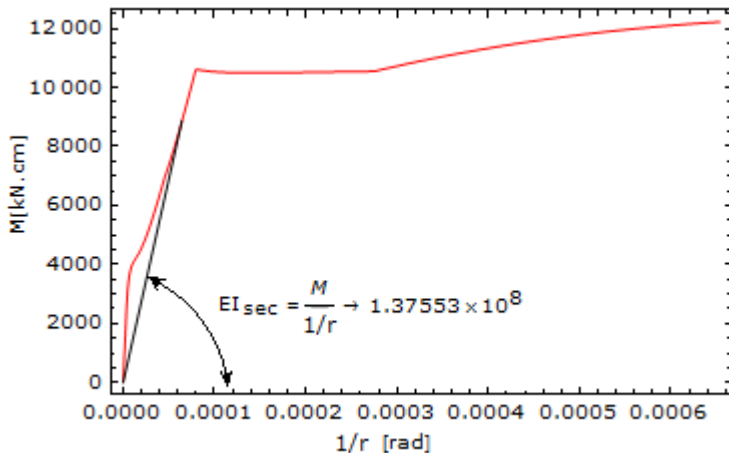


Figura 23 - Relação Momento Fletor x Curvatura.

O comportamento da seção após a fissuração depende principalmente da armadura e da resistência à tração do concreto. A partir do escoamento do aço, ocorre um grande aumento da curvatura, com o momento fletor aumentando pouco até o valor máximo.

Na Figura 23 é mostrado que a rigidez secante (EI_{sec}) para um valor específico do momento fletor é obtida pela relação entre o valor do momento fletor e a curvatura ($1/r$) equivalente.

Os diagramas são construídos com uma sucessão de valores de deformação do concreto na face comprimida, com incrementos de valores muito pequenos para que se obtenha uma precisão adequada na construção do diagrama momento-curvatura.

A Figura 24 mostra a variação da posição da linha neutra, na construção do diagrama momento-curvatura da mesma seção de concreto, em relação aos incrementos realizados nas deformações ε_{cm} da fibra mais comprimida da seção.

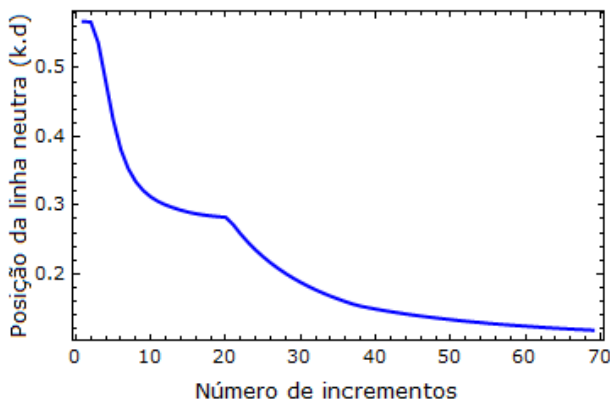


Figura 24 - Variação da posição da linha neutra no diagrama momento-curvatura.

3.3 Deformações do concreto

As estruturas de concreto são sujeitas a diversas ações externas durante a sua vida útil, tais como; peso próprio, cargas acidentais e permanentes, vento, sismos, empuxos e mudanças nas condições ambientais tais como variação de temperatura e umidade relativa. Outros tipos de ações são os esforços internos, gerados pelas deformações impostas tais como a retração, temperatura ou recalques diferenciais, e todas são muito importantes nas primeiras idades do concreto.

A resposta das estruturas de concreto a estas ações é complexa e resulta em três tipos de deformações: elástica, plástica e viscosa, bem como as suas combinações, tais como as elasto-plásticas e visco-elásticas. As deformações podem ser classificadas em duas categorias com respeito ao tempo: deformações independentes do tempo e dependentes do tempo, e em duas categorias com respeito às tensões: deformações dependentes das tensões e independentes das tensões.

As deformações instantâneas referem-se às deformações independentes do tempo, e representam a reação imediata quando a ação é imposta à estrutura. A deformação lenta refere-se às deformações dependentes do tempo, aquelas que acontecem depois da imediata.

Outra classificação das deformações é a separação das deformações dependentes do tempo em componentes reversíveis e irreversíveis. As deformações reversíveis são: a deformação elástica instantânea e a deformação elástica no tempo; as deformações irreversíveis são a instantânea inelástica e a de natureza plástica, e a deformação inelástica no tempo de natureza viscosa.

3.3.1 Deformação imediata

Como diversos materiais estruturais, o concreto possui, dentro de certos limites, um comportamento elástico quando uma tensão inicial é aplicada. A deformação sob o carregamento é principalmente elástica com um pequeno componente inelástico, e corresponde ao módulo de elasticidade na idade que o carregamento é aplicado. Esta deformação é geralmente denominada de deformação instantânea ou imediata, e para fins práticos, a deformação que ocorre durante o carregamento, de segundos ou minutos, é considerada elástica, e o acréscimo subsequente nas deformações é considerado como dependente do tempo (fluência).

A deformação que ocorre durante a aplicação da tensão (ou imediatamente após) é denominada de deformação imediata ou instantânea e é expressa por:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}(t_0)} \quad (43)$$

3.3.2 Fluência do concreto

A fluência é a deformação dependente do tempo e da tensão, a qual ocorre em um tempo prolongado de carregamento. A deformação do concreto aumenta com o tempo, sob um carregamento sustentado, devido à fluência.

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990, a fluência do concreto depende: da idade do carregamento, da espessura do elemento estrutural, da umidade e temperatura do ambiente, do tipo de cimento, do grau de maturidade do concreto, da resistência do concreto e de inúmeros outros fatores.

Conforme Süsserkind (1980), a deformação lenta manifesta-se de forma mais rápida logo após o carregamento, apresentando uma tendência assintótica de crescimento com o tempo, aproximando-se da

deformação final após um período da ordem de 2 ou 3 anos, mostrado na Figura 25.

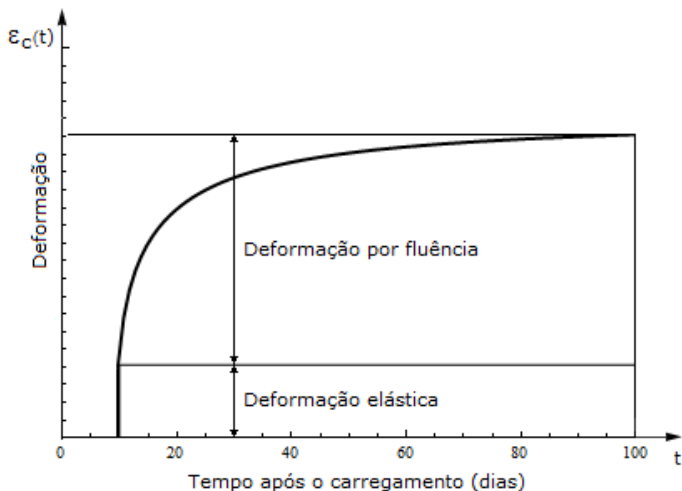


Figura 25 - Fluência do concreto submetido à tensão constante. (GHALI e FAVRE, 1994).

3.3.3 Retração do concreto

A retração do concreto é a diminuição em seu volume por perda de umidade sem estar submetido às tensões aplicadas. Esta variação de volume ocorre gradualmente com o tempo iniciando-se no momento do término da cura do concreto. A taxa de variação da retração diminui com o tempo até atingir um valor limite, dependendo dos componentes da mistura do concreto, da temperatura ambiente e da umidade relativa do ar. O desenvolvimento da retração do concreto e o seu valor último aumentam proporcionalmente com o fator água/cimento porque a perda de água da mistura será maior. Um aumento na umidade relativa do ar ou redução da temperatura produz menos retração pela mesma razão.

O modelo de previsão da retração de uma peça de concreto calcula a deformação livre média de longa duração exposta a um ambiente seco ou úmido após a cura.

3.3.3.1 Retração autógena

Conforme Kataoka (2010), a retração autógena é a redução de volume do material cimentício na hidratação do cimento após o início da pega.

Esta retração é consequência da remoção de umidade dos poros capilares pela hidratação do cimento ainda não hidratado. A redução de volume que ocorre na retração autógena não é causada pela troca de umidade com o ambiente, variação de temperatura e restrições. A reação química entre o cimento e a água se dá com redução de volume, de tal forma que a água quimicamente combinada (22 a 32%) sofre uma contração de 25% de seu volume original. A deformação autógena tende a aumentar devido a temperaturas muito altas, teores de cimento maiores e relações água/cimento menores.

3.3.3.2 Retração por secagem

Retração por secagem, ou hidráulica é a propriedade que consiste na contração irreversível decorrente da variação de umidade das pastas de cimento, argamassa ou concreto, assim como em outros materiais cuja estrutura interna seja de natureza porosa (KATAOKA, 2010).

Esta deformação está associada à perda de umidade para o meio ambiente o que a torna uma das principais causas de fissuração.

3.3.4 Modelos de materiais para fluência e retração

Segundo Bazant e Baweja (2000), é muito difícil a previsão realística da fluência e retração do concreto por serem resultados da interação de diversos mecanismos físicos e serem influenciados por muitos parâmetros.

Diversos modelos foram propostos para a previsão da fluência e retração. Dentre os modelos, os mais estudados são: ACI209R (2008) - ACI, Eurocode 2 (2003) - EC2, Bazant e Baweja (2000) - B3, Gardner e Lockman (2001)- GL e NBR 6118 (2007). Estes modelos apresentam complexidade e quantidade de dados de entrada distintos.

3.3.4.1 Deformações no concreto de acordo com a NBR 6118:2007

Conforme a Norma Brasileira NBR 6118 (2007), quando é aplicada no concreto, no intervalo de tempo $t - t_0$, sem nenhum impedimento à livre deformação, no tempo t_0 uma tensão constante, a sua deformação total, no tempo t , pode ser dada por:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) \quad (44)$$

onde:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}(t_0)} \quad (45)$$

é a deformação imediata, por ocasião do carregamento, com $E_{ci}(t_0)$ calculado, para $j = t_0$, pela eq.(1).

$$\varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci28}} \varphi(t, t_0) \quad (46)$$

é a deformação por fluência, no intervalo de tempo (t, t_0) , com E_{ci28} calculado pela mesma expressão para $j = 28$ dias;

e $\varepsilon_{cs}(t)$ é a deformação por retração, no intervalo de tempo (t, t_0) .

A fluência rápida (ε_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou. A fluência lenta é por sua vez composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}).

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad (47)$$

$$\varepsilon_{c,tot} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c(1 + \varphi) \quad (48)$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d \quad (49)$$

onde:

φ_a é o coeficiente de deformação rápida;

φ_f é o coeficiente de deformação lenta irreversível;

φ_d é o coeficiente de deformação lenta reversível;

Para o cálculo dos efeitos da fluência, quando as tensões no concreto são as de serviço, admitem-se as seguintes hipóteses:

- deformação por fluência (ε_{cc}) varia linearmente com a tensão aplicada;
- para acréscimos de tensão aplicados em instantes distintos, os respectivos efeitos de fluência se superpõem;
- a deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores do coeficiente φ_a são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;
- o coeficiente de deformação lenta reversível φ_d depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;

O coeficiente de deformação lenta irreversível φ_f depende de:

- umidade relativa do ambiente (U);
- consistência do concreto no lançamento;
- espessura fictícia da peça h_{fic}
- idade fictícia do concreto no instante (t_0) da aplicação da carga;
- idade fictícia do concreto no instante considerado (t) ;

3.3.4.2 Valor da fluência

No instante t a deformação devida à fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccd} + \varepsilon_{ccf} = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (50)$$

com E_{c28} calculado, para $j = 28$ dias, pela eq.(1)

O coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, é dado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{a\infty} \beta_d \quad (51)$$

O coeficiente de fluência rápida φ_a é dado por:

$$\varphi_a = 0.8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_{\infty})} \right] \quad (52)$$

A função de crescimento da resistência do concreto com a idade é dada por:

$$f_c(t) = \beta_1 f_{ck} \quad (53)$$

onde:

$$\beta_1 = e^{\left\{ s[1 - (28/t)^{1/2}] \right\}} \quad (54)$$

$s = 0.38$ para concreto de cimento CPIII e IV;

$s = 0.25$ para concreto de cimento CPI e II;

$s = 0.20$ pra concreto de cimento CPV-ARI.

O valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível é dado por:

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \varphi_{2c} \quad (55)$$

φ_{1c} é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente U , em porcentagem, e da consistência do concreto dada por:

$$\varphi_{f\infty} = 4.45 - 0.035 U \quad (56)$$

Para abatimento (*slump*) no intervalo de 5 cm a 9 cm e $U \leq 90\%$.

Os valores de φ_{1c} para $U < 90\%$ e abatimento (*slump*) entre 0 cm e 4 cm são 25 % menores e para abatimentos entre 10 cm e 15 cm são 25 % maiores.

φ_{2c} é o coeficiente dependente da espessura fictícia da peça h_{fic} calculado por:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2 A_c}{u_{ar}} \quad (57)$$

onde:

γ é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente (U em %), dado por:

$$\gamma = 1 - e^{(-7.8 + 0.1U)} \quad (58)$$

A_c é a área da seção transversal da peça;

u_{ar} é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (59)$$

onde:

h_{fic} é a espessura fictícia da peça, em centímetro.

$\beta_f(t)$ ou $\beta_f(t_0)$ é o coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto.

$\varphi_{d\infty}$ é o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível que é considerado igual a 0,4;

$\beta_d(t)$ é o coeficiente relativo à deformação lenta reversível função do tempo $(t - t_0)$ decorrido após o carregamento dado por:

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (60)$$

$\beta_f(t)$ é dado por:

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \quad (61)$$

t é o tempo, em dias ($t \geq 3$).

onde:

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \quad (62)$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \quad (63)$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \quad (64)$$

$$D = 7579h^3 - 3191h^2 + 35343h + 1931 \quad (65)$$

h é a espessura fictícia, em metro; para valores fora do intervalo, $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes.

3.3.4.3 Retração do concreto

O valor da retração do concreto depende da:

- umidade relativa do ambiente;
- consistência do concreto no lançamento;
- espessura fictícia da peça

A retração do concreto entre os instantes t_0 e t é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty}[\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (66)$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s}\varepsilon_{2s} \quad (67)$$

onde ε_{cs} é o valor final da retração;

ε_{1s} é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto, sendo calculado por:

$$10^4 \cdot \varepsilon_{1s} = -6.16 - \left(\frac{U}{484}\right) + \left(\frac{U^2}{1590}\right) \quad (68)$$

Os valores de ε_{1s} para $U < 90\%$ e abatimento (slump) entre 0 cm e 4 cm são 25 % menores e para abatimentos entre 10 cm e 15 cm são 25 % maiores.

ε_{2s} é o coeficiente dependente da espessura fictícia da peça

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20.8 + 3h_{fic}} \quad (69)$$

Tabela 4 - Valores usuais para a determinação da fluência e da retração.
(Fonte: NBR 6118, 2007).

Ambiente	Umidade U %	Fluência $\Phi_{1c}^{1;3}$			Retração $10^4 \epsilon_{1c}^{2;3}$			γ^4	
		Abatimento de acordo com a ABNT NBR NM 67 (cm)							
		0 - 4	5 - 9	10 - 15	0 - 4	5 - 9	10 - 15		
Na água	-	0,6	0,8	1,0	+1,0	+1,0	+1,0	30,0	
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	-1,0	-1,3	-1,6	5,0	
Ao ar livre, em geral.	70	1,5	2,0	2,5	-2,5	-3,2	-4,0	1,5	
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	-4,0	-5,2	-6,5	1,0	

1) $\phi_{1c} = 4,45 - 0,035 U$ para abatimento no intervalo de 5 cm a 9 cm e $U \leq 90\%$

2) $10^4 \varepsilon_{1c} = 6,16 - (U/484) + (U^2/1590)$ para abatimento no intervalo de 5 cm a 9 cm e $U \leq 90\%$

3) Os valores de ϕ_{1c} e ε_{1c} para $U \leq 90\%$ e abatimento entre 0 cm a 4 cm são 25% menores e para abatimentos entre 10 e 15 cm são 25 % maiores.

4) $\gamma = 1 + e^{(-7,8 + 0,1 U)}$ para $U \leq 90\%$

Notas:

- 1) Para efeito de cálculo, as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados no caso de tração.
- 2) Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço sem a adição de superplastificantes e superfluidificantes.

onde:

h_{fic} é a espessura fictícia da peça, em centímetro.

$\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ é o coeficiente relativo à retração, no instante t ou t_0 .

t é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;

t_0 é a idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\frac{t}{100}}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\frac{t}{100} + E} \quad (70)$$

onde:

$$A = 40 \quad (71)$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4.8 \quad (72)$$

$$C = 2.5h^3 - 8.8h^2 + 40.7 \quad (73)$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6.8 \quad (74)$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0.8 \quad (75)$$

h_{fic} é a espessura fictícia, em metro; para valores fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1.6)$, adotam-se os extremos correspondentes.

t é o tempo, em dias ($t \geq 3$).

A Figura 26 mostra o caso de uma viga de concreto com armadura simples sujeita a ação da retração. A curvatura provocada pela retração ocorre quando o centróide das armaduras e da seção de concreto não coincidem e a retração do concreto, combinada com a resistência da armadura, curvam a viga de uma maneira semelhante a uma barra bimetálica sujeita a uma variação de temperatura.

A deformação imposta pela retração gera forças de compressão na armadura (LÚCIO, 2006). O valor dessa força pode ser calculado por:

$$N = -\varepsilon_{cs} E_S A_s \quad (76)$$

Por equilíbrio, no caso de armadura simples, surge no concreto uma força de compressão e um momento fletor, dados por:

$$N = \varepsilon_{cs} E_S A_s \text{ e } M = \varepsilon_{cs} E_S A_s (d - x) \quad (77)$$

Neste caso a curvatura é calculada por:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{cs} = \frac{M}{E_c I_g} = \frac{A_s \varepsilon_{cs} E_S (d - x)}{E_c I_g} \quad (78)$$

onde A_s é as armaduras inferior da seção.

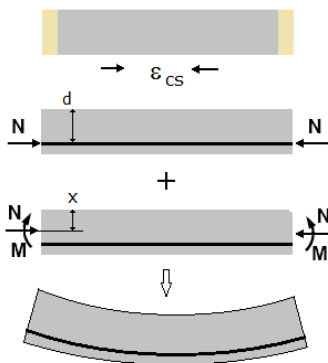


Figura 26 – Retração do concreto

A armadura de compressão reduz a curvatura por retração devido ao deslocamento do centróide das armaduras de tração e compressão em direção à linha neutra da seção de concreto.

Para o caso no qual a armadura é dupla e constante ao longo do vão, a flecha devido à retração pode ser calculada conforme o ACI Committe 209R-92 (1997) pelo método da força de tração equivalente da com um acréscimo de curvatura devido a uma deflexão causada pela retração, com a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{cs} = \frac{2 (A_{s2} + A_{s1}) \varepsilon_{cs} E_s e_g}{E_c I_g} \quad (79)$$

onde:

e_g é a distância entre o centroide da seção e o centroide da armadura; I_g é o momento de inércia da seção bruta de concreto, desprezando-se a armadura.

E_c é módulo de elasticidade do concreto e E_s é o módulo de elasticidade do aço.

A_{s1} e A_{s2} são as armaduras superior e inferior da seção respectivamente.

3.3.5 Efeitos de longa duração

O resultado do comportamento de longa duração de estruturas de concreto armado depende de um grande número de fatores, conforme já mencionado. Para prever este comportamento para um determinado carregamento e determinadas condições ambientais, as propriedades dos materiais devem ser adequadamente definidas e um modelo matemático preciso deve ser utilizado.

Neste estudo os cálculos dos efeitos de longa duração nas vigas de concreto utilizam um procedimento iterativo para um tempo específico e um carregamento devido a uma história de carregamento simplificada, como mostrado na Figura 27.

No tempo t_1 é aplicada uma carga instantânea de construção q_{cons} . O carregamento máximo na estrutura geralmente ocorre durante a construção, portanto q_{cons} será adotado como igual à carga permanente somado à carga accidental. O carregamento então se reduz para um nível de carregamento permanente ou sustentado e permanece constante com este valor. Uma carga accidental ou variável é aplicada em um tempo t_2

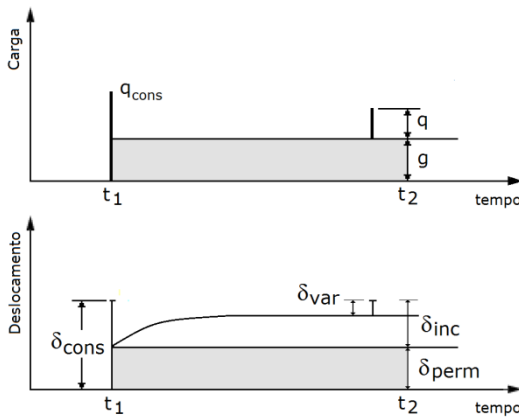


Figura 27 - Carregamento simplificado e deslocamentos correspondentes.

O deslocamento de longa duração incremental pode então ser calculada com:

$$\delta_{inc} = \delta_{var} + \gamma_{f2} \delta_{\Delta perm} \quad (80)$$

onde:

δ_{var} = parcela variável do deslocamento devido ao carregamento accidental.

δ_{perm} = parcela do deslocamento devido ao carregamento permanente ou sustentado.

γ_{f2} = coeficiente de ponderação das ações no estado limite de serviço (ELS), ψ_1 para combinações frequentes e ψ_2 para combinações quase permanentes.

O cálculo das tensões e deformações de estruturas de concreto armado considerando os efeitos da fluência e da retração podem ser obtidos por diversos procedimentos, tais como:

- Método do módulo efetivo (EM),
- Método da razão da fluência (RC),
- Método da razão do fluxo (RF),
- Método melhorado de Dischinger (ID),
- Método da superposição,
- Método de Trost-Bazânt (TB) e
- Modelos reológicos, (NEVILLE, 1983).

A maioria destes métodos são simplificações ou modificações do princípio da superposição linear.

Para este estudo de vigas biapoiadas foi adotado o Método do módulo efetivo (EM), pelo fato das variações das tensões no tempo devido à fluência serem pequenas e o efeito destas variações irrelevantes no cálculo dos deslocamentos das vigas.

3.3.5.1 Método do módulo efetivo (EM)

Conforme a NBR 6118 (2007), quando há variação de tensão ao longo do intervalo, induzida por ações externas ou agentes de diferentes propriedades reológicas (incluindo-se armadura, concretos de diferentes idades etc.), a deformação total no concreto pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \\ & + \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_{c\tau}} + \frac{\alpha \varphi(\tau, t_0)}{E_{c28}} \right] d\tau \end{aligned} \quad (81)$$

onde os três primeiros termos representam a deformação não impedida, e, a integral, os efeitos da variação de tensões ocorridas no intervalo.

A NBR 6118 (2007) permite-se substituir essa expressão por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \\ & + \Delta \sigma_c(t, t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \end{aligned} \quad (82)$$

onde:

$\Delta \sigma_c(t, t_0)$ é a variação total de tensão no concreto, no intervalo (t, t_0) ;

ε_{cs} a retração livre do concreto no intervalo entre t_0 e t ;

$\varphi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência no tempo t para um carregamento aplicado no tempo t_0 .

E_c é o módulo de elasticidade do concreto no tempo t ;

Os três termos na eq. (82) representam as deformações no concreto nas idades t devido à tensão $\sigma_c(t_0)$ aplicada na idade t_0 e mantida durante o período (t, t_0) , um incremento de magnitude zero na idade t_0 aumentando gradualmente para um valor final $\Delta\sigma_c(t)$ na idade t , e a retração livre que ocorre no período (t, t_0) .

Nos casos em que a tensão $\sigma_c(t_0)$ não varia significativamente, a NBR 6118 (2007) permite, no item 11.3.3.2, que essas deformações sejam calculadas simplificadamente pela expressão:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (83)$$

Módulo de elasticidade modificado

Ghali e Favre (1994) apresentam o módulo efetivo ou o módulo de elasticidade modificado, proposto por Trost (1967), reescrevendo a eq. (83) da seguinte maneira:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] + \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{\bar{E}_c(t_0)} + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (84)$$

onde:

$$\bar{E}_c(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (85)$$

$E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade modificado (*age-adjusted elasticity modulus*) a ser usado no cálculo do incremento total das deformações, imediata e a da fluência, devido a um incremento de tensão de magnitude zero na idade t_0 aumentando gradualmente para um valor final $\Delta\sigma_c(t)$ na idade t . Deste modo, o incremento de deformação no intervalo (t, t_0) devido à tensão $\Delta\sigma_c(t, t_0)$ é dado por:

$$\Delta\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{\bar{E}_c(t_0)} \quad (86)$$

Ghali e Favre (1994) introduziram o coeficiente de ajuste da idade do concreto, χ (menor ou igual a 1), que depende da idade do início do carregamento que é mantido sustentado (Tabela 58). A eq. (85) é escrita então como:

$$\bar{E}_c(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi\varphi(t, t_0)} \quad (87)$$

Após a determinação do deslocamento ou flecha imediata, o seguinte procedimento é usado para o cálculo do deslocamento de longa-duração:

- a) O módulo de elasticidade efetivo é calculado em uma determinada idade, t , usando a eq.(87);

- b) Com este módulo de elasticidade efetivo o deslocamento de longa duração considerando a fluência é calculado com o mesmo algoritmo usado para a flecha imediata;
- c) O deslocamento de longa-duração devido à retração é calculado usando-se a curvatura obtida pela eq.(79);
- d) O deslocamento devido à retração é somado aos valores previamente obtidos para o deslocamento imediato e o deslocamento de longa duração considerando a fluência, e obtém-se o deslocamento ou flecha final.

4. ANÁLISE DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1 Introdução

As vigas são o tipo mais comum de elementos estruturais, especialmente em engenharia civil. A viga é um elemento estrutural, considerado como barra, que de modo geral, é projetado para resistir a uma combinação de ações de carregamentos tais como, flexão biaxial, esforço cortante transversal, esforço axial de tração ou compressão, e possivelmente torção. Elemento considerado como barra, significa que uma das dimensões é muito maior do às outras duas. Esta dimensão maior é denominada de dimensão longitudinal ou eixo da viga. A intersecção de planos normais à dimensão longitudinal é chamada de seção transversal. As vigas submetidas basicamente à flexão e à compressão são denominadas de vigas-coluna. As vigas submetidas somente a momentos fletores são denominadas simplesmente de vigas.

4.2 Vigas

Uma viga resiste a um carregamento transversal basicamente por flexão. A flexão produz tensões de compressão longitudinais em um lado da viga e tensões de tração no outro. As duas regiões são separadas por uma superfície neutra de tensões normais nulas. A combinação destas tensões de tração e compressão produz um momento de flexão interno denominado momento fletor.

4.2.1 Modelos matemáticos

Um modelo matemático unidimensional de vigas estruturais é construído com base na teoria de vigas. Como vigas são na realidade corpos tridimensionais, todos os modelos envolvem certa aproximação em relação à realidade física. Os modelos mais simples e eficientes para vigas prismáticas e retas são baseados na teoria de vigas de Bernoulli-Euler (também conhecida como teoria clássica de vigas). Outro exemplo de modelo de vigas é o de Timoshenko.

Os dois modelos podem ser usados na formulação de elementos finitos de vigas (LORIGGIO, 2005).

O modelo de vigas de Bernoulli-Euler resulta no conhecido elemento de viga *Hermitiano*. Estes elementos de vigas também são conhecidos como elementos C^1 , como será mostrado no item 4.5.2. Este

modelo despreza as deformações por cisalhamento. Elementos baseados na teoria de vigas de Timoshenko, também conhecidos como elementos C^0 , incorporam a correção de primeira ordem para os efeitos transversais de cisalhamento.

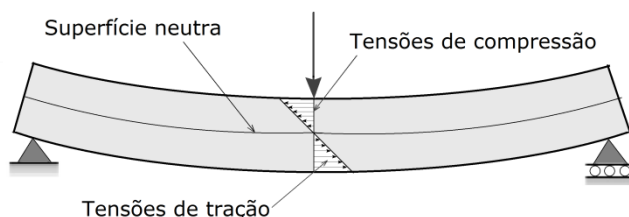


Figura 28 - Viga submetida a cargas transversais.

4.2.2 Hipóteses básicas da teoria clássica de vigas

A teoria de Bernoulli-Euler ou teoria clássica de vigas para vigas planas baseia-se nas seguintes hipóteses fundamentais:

- 1) Simetria plana: O eixo longitudinal é reto, e a seção transversal da viga tem um eixo um plano longitudinal de simetria. A resultante das cargas transversais que atuam em cada seção está neste plano.
- 2) Variação da seção transversal: A seção transversal é constante ou varia suavemente.
- 3) Ortogonalidade: As seções originalmente planas ao eixo longitudinal permanecem planas e ortogonais ao eixo longitudinal deformado após a flexão da viga.
- 4) Energia de deformação: A energia interna de deformação do elemento leva em consideração somente as deformações por flexão. Todas as demais contribuições, especialmente os esforços cortantes transversais e as forças axiais, são desprezadas.
- 5) Linearização: Os deslocamentos transversais, rotações e deformações são considerados tão pequenos, que as hipóteses de deformações infinitesimais podem ser aplicadas.
- 6) Na modelagem dos materiais, o material é admitido como isotrópico e elástico.

4.3 Teoria de viga de Bernoulli-Euler

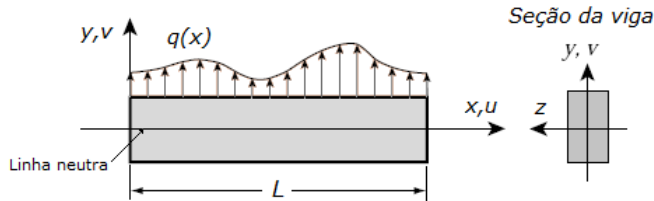


Figura 29 – Modelo de Bernoulli-Euler de uma viga plana.

4.3.1 Sistema de coordenadas do elemento

Um sistema de coordenadas Cartesiano dextrogiro é adotado para a análise do modelo de viga plana conforme mostrado na Figura 29. O eixo x é localizado ao longo do eixo longitudinal da viga. O eixo y se localiza no plano de simetria e é positivo para cima. O eixo z por consequência é normal ao plano formado pelos eixos x e y .

4.3.2 Cinemática

O movimento de uma viga plana no plano x, y é descrito por um campo bidimensional de deslocamentos dado por:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad (88)$$

onde u e v são as componentes dos deslocamentos axiais e transversais, respectivamente, de um ponto material arbitrário da viga. O deslocamento na direção z , que é basicamente devido ao efeito do coeficiente de Poisson, não é considerado na teoria de vigas de Bernoulli-Euler. A hipótese de ortogonalidade do modelo de Bernoulli-Euler pode ser representada matematicamente como:

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -yv' = -y\theta \quad e \quad v(x, y) = v(x) \quad (89)$$

A tangente $v' = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{dv}{dx}$ da curva elástica foi identificada como uma rotação θ , isto é possível porque θ , representa em primeira ordem de acordo com as hipóteses cinemáticas deste modelo, a rotação da seção transversal em relação ao eixo z .

4.3.3 Carregamento

A carga transversal por unidade de comprimento aplicada no elemento de viga, na direção positiva de y é denominada de $q(x)$, como

mostrado na Figura 29. Cargas concentradas serão aplicadas nos nós de ligação dos elementos finitos, e considerados positivas na direção $+y$.

4.3.4 Condições de apoio

As condições de apoio de vigas são de diversos tipos. Dois casos canônicos de condições de apoio são frequentemente encontrados em estruturas de engenharia, apoio simples e apoios engastados.

4.3.5 Tensões, Deformações e Momentos Fletores.

O modelo de viga de Bernoulli-Euler ou modelo clássico assume que a energia interna do elemento de viga é inteiramente devido às tensões e deformações de flexão. A flexão produz tensões axiais σ_{xx} e deformações ε_{xx} , que serão abreviadas respectivamente para σ e ε . As deformações podem ser relacionadas com as tensões pela diferenciação dos deslocamentos axiais $u(x)$ da eq.(89).

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -y v'' = -y \left(\frac{1}{r} \right) \quad (90)$$

onde $(1/r)$ é a curvatura do eixo deformado da viga, que é aproximadamente igual a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v''$. A tensão de flexão $\sigma = \sigma_{xx}$ é relacionada à ε pela lei de Hooke unidimensional:

$$\sigma = E\varepsilon = -Ey \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -Ey \left(\frac{1}{r} \right) \quad (91)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material. A resultante das tensões na teoria de viga clássica é o *momento fletor* M , que é definido como a integral das tensões na seção transversal:

$$M = \int_A -y \sigma dx = E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_A y^2 dA = EI \left(\frac{1}{r} \right) \quad (92)$$

A grandeza $I = I_{zz}$ é o momento de inércia $\int_A y^2 dA$ da seção transversal em relação ao eixo neutro z .

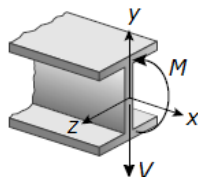


Figura 30 – Convenção positiva de sinais para M e V .

O momento fletor M é considerado positivo, conforme mostrado na Figura 30, quando o seu efeito é comprimir a parte superior da viga, esta é a razão do sinal negativo na eq. (92). O produto EI é chamado de *rigidez à flexão* da viga com relação ao eixo z .

4.4 Análise não linear pelo Método dos elementos finitos

Segundo Bathe (1982), as etapas básicas para obtenção das equações que regem o problema de elementos finitos na análise não linear são as mesmas utilizadas na análise linear: a escolha das funções de interpolação para as coordenadas dos elementos e para os deslocamentos nodais nas equações que regem o problema na mecânica do contínuo, e a obtenção das equações de equilíbrio de forças através do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Como na análise linear, só é necessário considerar um único elemento para a obtenção destas equações, já que as equações de equilíbrio para todos os elementos podem ser obtidas da mesma forma que na análise matricial de Estruturas, admitindo-se a continuidade de deslocamentos entre elementos.

A base dos procedimentos para o método dos elementos finitos baseados nos deslocamentos é o resultado da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

Supondo que a estrutura é deformável e submetida a um carregamento que induz um campo de deslocamento em cada ponto, dado por:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad (93)$$

o Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, na condição de equilíbrio, para qualquer deslocamento virtual imposto, infinitesimal e compatível com as restrições de vinculação, o trabalho virtual interno δW^i é igual ao trabalho virtual externo, δW^e .

Ou seja, se a esta configuração adiciona-se uma configuração virtual de pequenos deslocamentos, δu , ao se deslocar de u para $u + \delta u$, se a estrutura estava em equilíbrio o trabalho realizado pelas forças internas δW^i é igual ao trabalho virtual externo, δW^e .

Matematicamente esta condição é expressa por:

$$\delta W^i = \delta W^e \quad (94)$$

ou então,

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS \quad (95)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor de deformações específicas.

O termo à esquerda na eq.(95) expressa o valor do trabalho de deformação interno e o termo da direita, indica o trabalho realizado pelos carregamentos externos, como o vetor de forças de volume \mathbf{b} e o vetor de cargas de superfície \mathbf{q} . Pode-se incluir também forças concentradas, se for o caso.

A variação dos vetores de deslocamentos, $\bar{\mathbf{u}}$, e das deformações, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, são considerados virtuais, possíveis e próximos da configuração de equilíbrio da estrutura, mediante os carregamentos impostos.

Discretizando-se a estrutura em elementos finitos aproxima-se o campo de deslocamentos em cada elemento por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (96)$$

onde \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{N} é a matriz de funções de interpolação.

Derivando-se o campo de deslocamentos no elemento em relação a x, y e z , obtém-se o vetor de deformações específicas no elemento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (97)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de deformação específica e \mathbf{U} os deslocamentos do elemento.

O vetor de tensões no elemento é obtido a partir de:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (98)$$

onde $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é a matriz constitutiva secante do material.

A partir das eqs. (96) e (97) obtém-se:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{U} \quad (99)$$

$$\delta \mathbf{u}^T = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{N}^T \quad (100)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (101)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \quad (102)$$

A eq.(95) para cada elemento é dada então por:

$$\int_{V^e} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV^e = \int_{V^e} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV^e + \int_{S^e} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS^e \quad (103)$$

Substituindo-se as eqs. (97), (98), (99), (100), (101) e (102) na eq. (103) obtém-se a equação de equilíbrio de cada elemento:

$$\delta \mathbf{U}^T \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} \mathbf{U} dV^e \right] = \delta \mathbf{U}^T \left[\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS^e \right] \quad (104)$$

ou:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{f}^e \quad (105)$$

onde:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} dV^e \quad (106)$$

é a matriz de rigidez secante do elemento e,

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS^e \quad (107)$$

é o vetor de cargas consistente do elemento.

Somando-se a contribuição de todos os elementos e aplicando-se as condições de contorno, chega-se ao sistema de equações de equilíbrio da estrutura, discretizada por elementos finitos:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (108)$$

onde:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}) = \sum_e \mathbf{K}^e(\mathbf{U}) \quad (109)$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{f}^e \quad (110)$$

4.5 Formulação do elemento de viga plano

4.5.1 Elemento finito de viga de dois nós

Elementos finitos de viga são obtidos discretizando-se as barras das vigas longitudinalmente. O elemento simples de viga de Bernolli-Euler tem dois nós e quatro graus de liberdade (GL).

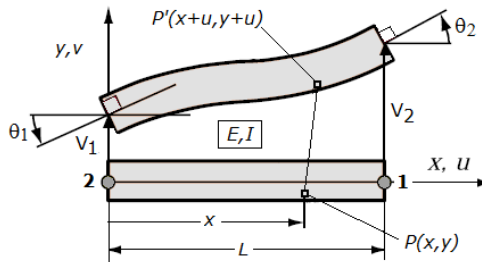


Figura 31 - Elemento de viga plana Bernoulli - Euler de 2 nós e 4 graus de liberdade.

Estes deslocamentos são representados no vetor de deslocamentos nodais:

$$\mathbf{u}^e = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T \quad (111)$$

A Figura 31 mostra um elemento de viga reta com 4 graus de liberdade. Assumindo o modelo de viga de Bernoulli-Euler a rotação θ é pequena, portanto $\theta = d\omega/dx$.

4.5.2 Funções de forma de elementos finitos de vigas

As funções de forma de elementos unidimensionais de dois nós são vistas como polinômios de primeiro grau. A interpolação polinomial garante que o deslocamento axial é contínuo dentro do elemento e entre os elementos. Os elementos que satisfazem esses requisitos de continuidade se denominam de classe C^0 . Pode-se exigir que o elemento tenha derivada primeira contínua no deslocamento axial, neste caso denomina-se classe C^1 .

Em geral um elemento é de classe C^m se o campo de deslocamento tem as m primeiras derivadas contínuas. A condição de continuidade dos elementos classe C^1 exige que $v(x)$ e $\theta = v'(x) = dv(x)/dx$ sejam contínuas ao longo do elemento, e também entre elementos.

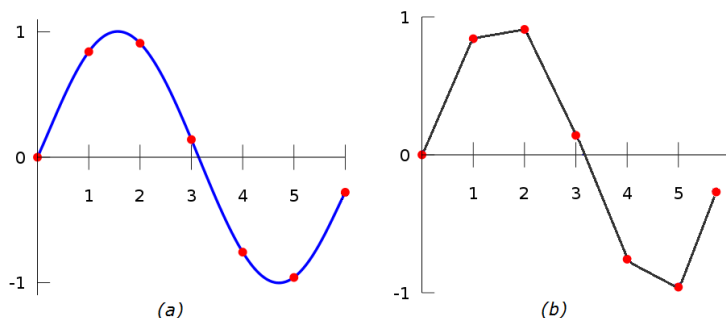


Figura 32 – (a) Deformação cúbica de elementos, C^1 ; (b) Deformação linear de elementos, C^0 . A interpolação tipo C^0 mantém somente a continuidade.

A razão física para a continuidade do elemento C^1 é ilustrada na Figura 32(a), pode-se observar que a aproximação de $v(x)$ é obtida por seis funções cúbicas, que mantêm a necessária continuidade. A Figura 32(b), mostra uma tentativa de aproximar $v(x)$ por seis trechos de funções lineares que mantêm somente a continuidade C^0 .

4.5.3 Funções de forma

As funções de forma mais simples que satisfazem ao critério de continuidade para a configuração nodal dos graus de liberdade dos elementos C^1 são chamadas de funções de forma *cúbica Hermitiana*. A fórmula de interpolação baseada nestas funções é:

$$\mathbf{v}^e = [\mathbf{N}_{v1}^e \ \mathbf{N}_{\theta1}^e \ \mathbf{N}_{v2}^e \ \mathbf{N}_{\theta2}^e] = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e \quad (112)$$

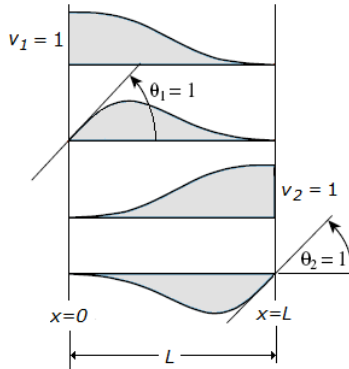


Figura 33 – Funções de forma cúbica de um elemento de viga plano.

Estas funções de forma podem ser expressas em termos das coordenadas naturais:

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1 = \quad (113)$$

onde L é o comprimento do elemento. A coordenada ξ varia de $\xi = -1$ no nó 1 ($x = 0$) até $\xi = +1$ no nó 2 ($x = L$).

Como $\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}L$ e $\frac{d\xi}{dx} = \frac{L}{2}$, pode-se escrever as funções de forma em função de ξ . Essas funções são mostradas na Tabela 5.

A curvatura $1/r$ que aparece em u na eq. (90), pode ser expressa em termos dos deslocamentos nodais pela dupla diferenciação em relação à x :

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d^2 v^e(x)}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v^e(\xi)}{d\xi^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d\mathbf{N}^e}{d\xi^2} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e = \mathbf{N}'' \mathbf{u}^e \quad (114)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{N}''$ é a matriz de 1×4 de curvatura – deslocamento.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 6\frac{\xi}{L} & 3\xi - 1 & -6\frac{\xi}{L} & 3\xi + 1 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Tabela 5 – Funções de forma em função de ξ .

N_{v1}^e	$\frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$
$N_{\theta 1}^e$	$\frac{1}{8}L(1 - \xi)^2(1 + \xi)$
N_{v2}^e	$\frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi)$
$N_{\theta 2}^e$	$-\frac{1}{8}L(1 + \xi)^2(1 - \xi)$

4.5.4 Equações do elemento finito de viga

A partir da matriz de rigidez secante de um elemento dada pela eq. (106) e com:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (116)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \sigma_x = E(\varepsilon_x)\varepsilon_x = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (117)$$

onde:

$$\mathbf{D} = E(\varepsilon_x) \quad (118)$$

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_0^L \left[\int_A \mathbf{B}^T E(\varepsilon_x) \mathbf{B} dA \right] dx \quad (119)$$

Com as eqs. (90) e (92), definem-se uma deformação específica e uma tensão generalizada e as seguintes relações:

$$\bar{\varepsilon} = -y \left(\frac{1}{r} \right) \quad (120)$$

$$\bar{\sigma} = EI \left(\frac{1}{r} \right) \quad (121)$$

$$\varepsilon_x = \mathbf{B} \mathbf{U} = -y \left(\frac{1}{r} \right) \quad (122)$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U} \quad (123)$$

Com estas equações obtém-se:

$$\varepsilon_x = -y \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U} \quad (124)$$

$$\mathbf{B} = -y \bar{\mathbf{B}} \quad (125)$$

Substituindo a eq.(125) na eq.(119), obtém-se:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_0^L \left[\int_A -y \bar{\mathbf{B}}^T E(\varepsilon_x) (-y) \bar{\mathbf{B}} dA \right] dx \quad (126)$$

Como \mathbf{B} e $E(x)$ não variam na seção do elemento de viga, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T E(\epsilon_x) \mathbf{B} \left[\int_A y^2 dA \right] dx \quad (127)$$

A integral $\int_A y^2 dA$ é o momento de inércia I (função da curvatura $\left(\frac{1}{r}\right)$) da seção transversal em relação ao eixo neutro z , e, portanto a matriz de rigidez secante do elemento de viga é obtida com:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T EI \left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{B} dx \quad (128)$$

Com as funções de forma expressas em termos das coordenadas naturais, conforme apresentado no item 4.5.3, a matriz de rigidez do elemento, eq. (128) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T EI \left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{B} \frac{1}{2} L d\xi \quad (129)$$

Substituindo-se a matriz em \mathbf{B} na eq.(130) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e(\mathbf{U}) &= \frac{1}{2} EI \left(\frac{1}{r}\right) L \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{1}{2} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} EI \left(\frac{1}{r}\right) L \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{L} \\ 3\xi - 1 \\ -\frac{6\xi}{L} \\ 3\xi + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{L} & 3\xi - 1 & -\frac{6\xi}{L} & 3\xi + 1 \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (130)$$

Expandindo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \frac{EI \left(\frac{1}{r}\right)}{2L^3} \\ &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6\xi(3\xi - 1)L & -36\xi^2 & 6\xi(3\xi + 1)L \\ 6\xi(3\xi - 1)L & (3\xi - 1)^2 L^2 & -6\xi(3\xi - 1)L & (9\xi^2 - 1)L^2 \\ -36\xi^2 & -6\xi(3\xi - 1)L & 36\xi^2 & -6\xi(3\xi + 1)L \\ 6\xi(3\xi + 1)L & (9\xi^2 - 1)L^2 & -6\xi(3\xi + 1)L & (3\xi + 1)^2 L^2 \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (131)$$

e integrando no elemento é obtida a matriz de rigidez secante do elemento de viga plano de Euler-Bernoulli, com $EI = EI \left(\frac{1}{r}\right)$:

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (132)$$

A matriz de rigidez de um elemento de viga usando a teoria de Bernoulli-Euler também pode ser obtida usando os conceitos de Análise Matricial de estruturas e é apresentado por diversos autores, como por exemplo, Loriggio (2005).

Neste trabalho optou-se pela sua dedução via formulação de elementos finitos, que tem vantagens para a determinação das rigidezes quando se quer a inclusão de efeitos diversos, sendo, portanto uma formulação mais abrangente.

4.5.5 Vetor de cargas nodais consistentes

A equação do vetor de cargas consistente do elemento, eq.(107), também pode ser escrita em função das coordenadas naturais.

Se for considerado apenas o vetor de superfície q , como este carregamento é uniforme e não depende de x , ele pode ser movido para fora da integral obtendo-se o vetor de cargas consistentes do elemento de viga:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e &= \frac{1}{2} q L \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi = \\ &= \frac{1}{2} q L \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)^2(1+\xi) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\ -\frac{1}{8}(1+\xi)^2(1-\xi) \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL}{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (133)$$

4.6 Procedimento para a solução do sistema não linear

A linearidade física exprime a aplicabilidade da Lei de Hooke, estando, portanto relacionada ao comportamento do material. No caso do concreto armado, a formação e abertura de fissuras provocam a perda de proporcionalidade entre tensão e deformação, sendo um dos fenômenos responsáveis pela resposta não linear deste material.

Com relação à análise não linear física, foram utilizados neste trabalho modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento não linear do concreto e o fenômeno do *tension stiffening*. Para o aço foi considerado um modelo constitutivo que descreve o seu comportamento não linear por meio de uma relação tensão-deformação do aço desenvolvida por Esmaily e Xiao (2005).

O comportamento não linear físico dos materiais afeta a rigidez das seções transversais.

A não linearidade física pode ser levada em conta por meio do diagrama momento *versus* curvatura para cada seção, construído a partir da armadura suposta conhecida e do valor da força normal atuante. Utiliza-se esse diagrama para calcular a rigidez secante da barra correspondente a um determinado valor do momento fletor, considerando a reta secante à curva, conforme mostrado na Figura 34b.

O problema não linear pode ser transformado em uma sequência de análises lineares em cada incremento de força aplicado. Pode-se escrever a formulação incremental do equilíbrio com a eq. (105) reescrita na forma:

$$\mathbf{F} - \mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (134)$$

que representa um sistema de equações não lineares de equilíbrio nodal entre as cargas nodais externas e as ações nodais nos elementos. Onde \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais global da estrutura, e $\mathbf{0}$ é um vetor nulo.

Enquanto a solução do sistema de equações lineares pode ser encontrada sem dificuldades de uma maneira direta, isto não é possível para sistemas não lineares, mas as diversas técnicas disponíveis se baseiam em resolver tais sistemas lineares repetidamente até que a convergência seja alcançada.

Se o vetor de deslocamentos nodais da estrutura \mathbf{U} , não for a solução exata para eq.(134), existirá um vetor de forças residuais desequilibradas $\Psi(\mathbf{U})$, dado por:

$$\Psi(\mathbf{U}) = \mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (135)$$

O problema da análise não linear de estruturas, através do Método dos Elementos Finitos, com solução em deslocamentos, consiste

em encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , que torne o vetor de forças desequilibradas nulo, ou seja:

$$\Psi(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (136)$$

4.6.1 Algoritmo incremental-iterativo

A carga total aplicada na estrutura é dividida em certo número de partes iguais obtendo-se assim o vetor de incrementos de cargas $\Delta \mathbf{F}$, ou seja,

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{N_{etapas}} \quad (137)$$

onde \mathbf{F} é o vetor de cargas externas total e N_{etapas} é o número de etapas de carga que serão aplicadas na viga.

O vetor de cargas no final de cada etapa de carga \mathbf{F}_i é obtido adicionando-se o vetor de incremento de cargas ao vetor de cargas da etapa anterior \mathbf{F}_{i-1} , isto é:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i-1} + \Delta \mathbf{F} \quad (138)$$

Cada etapa do processo de carregamento inicia-se com um desequilíbrio $\Delta \mathbf{F}$ entre o vetor de cargas aplicadas \mathbf{F}_i e o vetor de ações nodais não lineares, como mostrado na Figura 34a. Portanto, deve ser empregado um processo iterativo que permita determinar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , para o qual seja estabelecido o equilíbrio de cargas externas e esforços internos.

4.7 Implementação

O modelo de cálculo de viga plano, descrito no item 4.5, foi implementado em um programa de computador em linguagem funcional, em um ambiente CAS (Computer Algebraic System), utilizando o sistema computacional do *software Mathematica* (WOLFRAM, 2003).

O modelo mecânico consiste em discretizar a viga de concreto armado em vários elementos de viga, para a obtenção dos esforços e deslocamentos nodais. Cada elemento tem a rigidez secante $EI(1/r)$ calculada individualmente conforme a solicitação atuante para a consideração do efeito *tension-stiffening*. Para isso, utilizou-se o modelo constitutivo em função do diagrama momento-curvatura apresentado no item 3.2.5.

A rigidez secante $EI(1/r)$ é calculada com os dados da seção do elemento, adotando-se como momento fletor a média dos momentos fletores atuantes nas extremidades do elemento.

A matriz de rigidez do elemento finito de viga é calculada com a rigidez secante EI_{sec} e o comprimento L do elemento usando a eq.(132).

Depois de calculadas as matrizes de rigidez de todos os elementos finitos da viga \mathbf{K}^e , é feito o cálculo da matriz de rigidez global da estrutura \mathbf{K} , pelos procedimentos da análise matricial de estruturas com a eq.(109),

A matriz de rigidez global \mathbf{K} da viga e o vetor de força nodal global \mathbf{f} são determinadas pela superposição das matrizes de rigidez e do vetor de forças nodais de todos os N elementos, respectivamente.

$$\mathbf{K} = \sum_{el=1}^{nbarras} \mathbf{K}^e[[el]] \quad (139)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura.

Uma operação semelhante tem de ser efetuada com os vetores solicitação dos diversos elementos finitos.

$$\mathbf{F} = \sum_{el=1}^{nbarras} \mathbf{f}^e[[el]] \quad (140)$$

Para obter-se a solução final para a viga, as equações devem ser modificadas de acordo com as condições de contorno prescritas e então formar o sistema de equações,

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (141)$$

O vetor coluna \mathbf{F} é o vetor de cargas nodais externas conhecidas, as forças nodais equivalentes, e os deslocamentos nodais desconhecidos \mathbf{U} são obtidos pelo procedimento de eliminação de Gauss utilizando a matriz simétrica em banda de \mathbf{K} . No programa implementado neste trabalho foi usada a função *LinearSolve* do sistema computacional do *software Mathematica*. A solução deste sistema de equações é feita automaticamente com a seguinte função: $\mathbf{U} = \text{LinearSolve}[\mathbf{K}, \mathbf{F}]$.

Dentre as várias possibilidades de estratégia de solução do problema não linear será adotado o método da iteração direta, o qual faz uso das matriz de rigidez secante para o ajuste do equilíbrio em cada etapa de carga.

No método da rigidez secante a rigidez da viga é atualizada para cada incremento a partir da atualização da rigidez efetiva obtida pela reta secante ao ponto considerado na curva momento-curvatura, até a convergência do sistema.

Neste procedimento de cálculo dos deslocamentos, na aplicação do primeiro incremento de carga é realizada uma análise linear utilizando a inércia da seção homogeneizada para obter-se um valor

inicial dos momentos fletores nos elementos, para então calcular o valor de El_{sec} de cada elemento, e em seguida, realizar uma nova análise.

Conforme mostrado no item anterior, o problema não linear pode ser transformado em uma sequência de análises lineares em cada incremento de força aplicado. Em uma dada etapa do processo de solução do sistema de equações não lineares, considera-se que tenha sido atingida a convergência, quando forem satisfeitas simultaneamente as duas condições abaixo em uma dada iteração r .

$$\frac{\|\Psi_r\|}{\|U_i\|} \leq 0.01 \quad (142)$$

e

$$\frac{\|\Delta U_r\|}{\|\delta U_r\|} \leq 0.01 \quad (143)$$

onde:

$\|\Psi_r\|$ é a norma do vetor de forças desequilibradas;

$\|F_i\|$ é a norma do vetor de cargas da etapa;

$\|\Delta U_r\|$ é a norma do vetor de incrementos de deslocamentos;

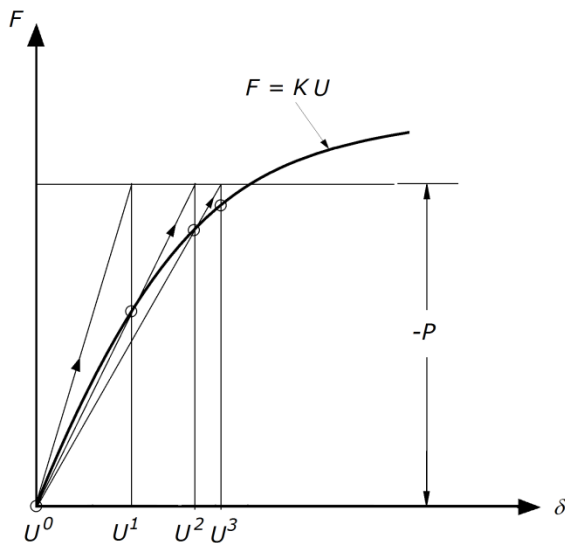
$\|U_r\|$ é a norma do último vetor de deslocamentos obtido.

Quando uma estrutura chega ao esgotamento de sua capacidade e os esforços resistentes não equilibram o carregamento externo, é sinal que ela atingiu a ruptura. Este fato é detectado pelo algoritmo quando não é mais possível satisfazer o critério de convergência, pois o vetor de desequilíbrio Ψ não pode ser reduzido a valores próximos de zero, por maior que seja o número de iterações.

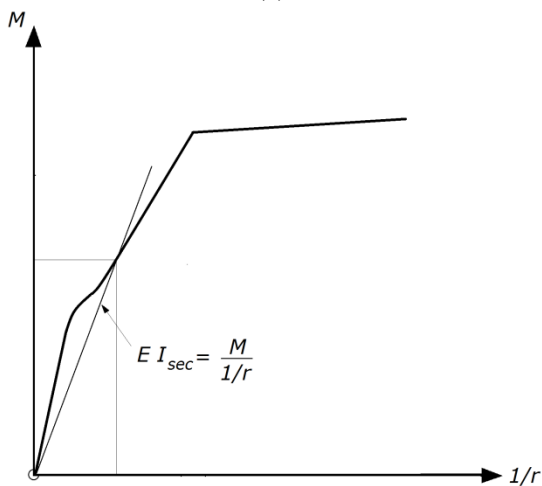
Quando isto acontece, o incremento de carga é dividido pela metade, retorna-se à configuração do início desta etapa, e procede-se no processo de convergência.

Se o algoritmo não convergir novamente, divide-se o incremento atual pela metade, volta-se a situação da etapa e procede-se no processo de convergência. Se ainda assim não for obtida a convergência, considera-se que a viga tenha atingido a ruína.

Neste modelo, a ruína da viga, ou a carga última também é determinada com o valor do momento fletor máximo produzido pelo carregamento. Quando este momento atinge o valor do momento último da seção de concreto indicado pela relação momento-curvatura da seção de concreto da viga, considera-se que foi atingida a carga última da viga.



(a)



(b)

Figura 34 – Interpretação gráfica do Método da rigidez secante.

5. VERIFICAÇÃO DO MODELO MECÂNICO

5.1 Introdução

Um procedimento simples de verificar a precisão de um modelo em elementos finitos é comparar a solução obtida com uma solução fechada ou uma solução exata. No caso de análises onde os materiais são elásticos, isotrópicos e homogêneos esta verificação é possível de ser feita, porém, para materiais com comportamento não linear devido à fissuração e efeitos dependentes do tempo, pode não haver soluções exatas para realizar a verificação.

Os resultados numéricos do modelo mecânico implementado neste trabalho foram então comparados com ensaios experimentais para verificar a precisão e determinar os valores apropriados dos parâmetros de *tension stiffening* que serão usados na simulação de Monte Carlo. Além disso, o modelo implementado também será comparado com modelos que utilizam a inércia efetiva como o modelo de Branson da NBR 6118 (2007).

A comparação entre o modelo numérico e os ensaios experimentais será feita com os resultados obtidos em vigas ensaiadas por Buckhouse (1997), Beber (1999), Juvandes (1999) e Álvares (1983), todas submetidas à flexão e simplesmente apoiadas. Os resultados obtidos pelo modelo numérico também foram comparados com uma base de dados experimental de ensaios diferidos em vigas de concreto armado feitas pelo Subcomitê do Comitê Técnico TC 114 do RILEM (ESPION 1993 apud. LLINÁS, 2002, p.102).

5.2 Vigas submetidas a cargas imediatas

Nesta seção o modelo mecânico implementado será verificado com ensaios de vigas de concreto armado submetidas a cargas imediatas, simplesmente apoiadas realizadas por diversos autores.

5.2.1 Ensaios de Buckhouse (1997)

Buckhouse (1997) realizou testes em vigas de controle de concreto armado que podem ser usadas para calibração em modelos de elementos finitos. As seções das vigas testadas eram de 254 mm de largura e 457 mm de altura.

Como mostrado na Figura 35, o comprimento das vigas era de 472,5 cm, apoiadas a 7,65 cm de cada extremidade e resultando em um vão simplesmente apoiado de 457,2 cm. A armadura utilizada era

formada por três barras de 5/8" (16 mm) e estribos de 3/8" distribuídos a cada 20 cm. A tensão de escoamento do aço, a resistência à compressão média do concreto aos 28 dias e a área de aço total da armadura foram obtido de Buckhouse (1997). Os demais parâmetros do concreto e do aço foram calculados a partir dos dados do ensaio com as equações da NBR 6118 (2007). Os dados são apresentadas na Tabela 6.

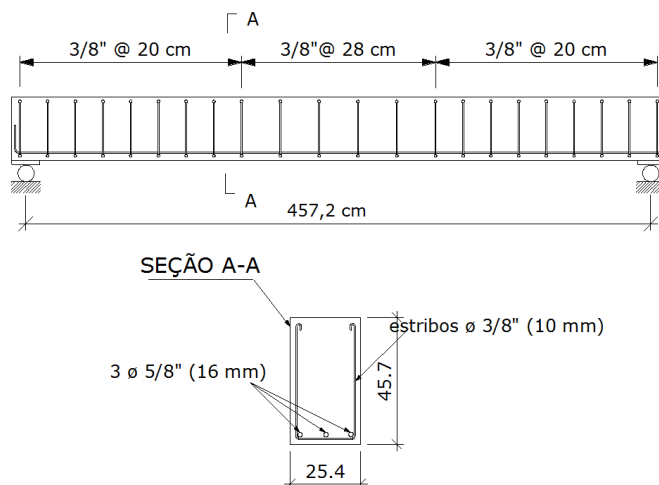


Figura 35- Detalhe típico da viga experimental de controle (BUCKHOUSE, 1997).

O ensaio apresentou um comportamento linear até o ponto “A” (Figura 36) e a partir deste ponto um trecho correspondendo a fissuração das seções de concreto que prosseguiu até o ponto B, onde a armadura de flexão atingiu a tensão de escoamento. A ruptura por flexão se deu no ponto C. O gráfico com a carga *versus* deslocamento (flecha no meio da viga) para a viga de controle C1 (BUCKHOUSE, 1997) é mostrado na Figura 36. A carga última teórica para a viga foi de 66,23kN, calculada por Buckhouse (1997). A Tabela 7 mostra que a carga média na primeira fissura foi de 20,4 kN, a carga última de ruptura determinada no ensaio foi de 74,0 kN e a flecha média no meio do vão para esta carga, 9,27 cm. A carga última teórica obtida pelo modelo mecânico foi de 71 kN e a flecha no meio do vão para esta carga, 8,1 cm, Figura 37.

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo modelo mecânico implementado estão em ótima concordância com os resultados experimentais deste ensaio experimental. A Figura 38 apresenta o diagrama momento curvatura da seção de concreto da viga C1.

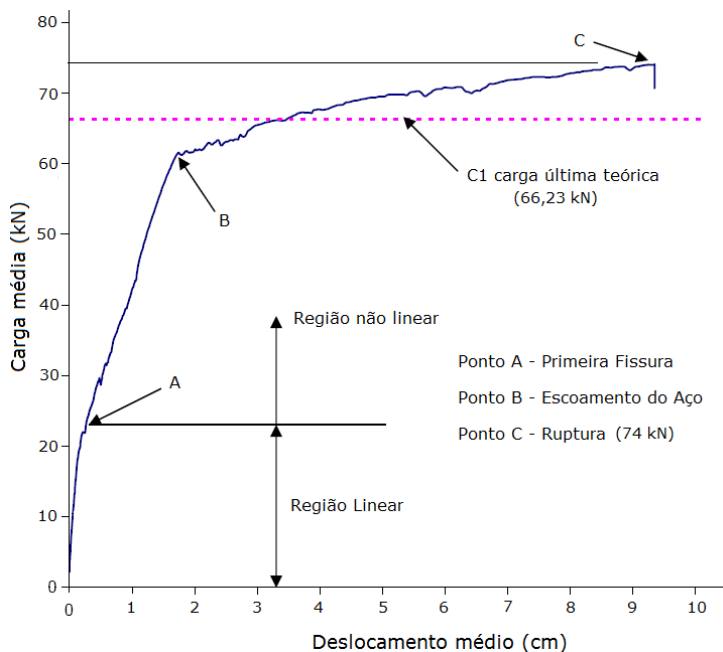


Figura 36 - Curva Carga – Deslocamento para a viga C1. (Adaptado de Buckhouse, 1997).

Tabela 6 - Propriedades do Aço e do Concreto (BUCKHOUSE, 1997).

Área da armadura inferior	6,03 cm ²
Posição da armadura CG ²	6,8 cm
Tensão de Escoamento do aço	422 MPa
Módulo de elasticidade do aço	205000 MPa
Resistência à Compressão do Concreto ¹	33,5 MPa
Resistência à tração do concreto	2,7 MPa

1) f_{cm}^1 - obtido a partir de ensaios do concreto aos 28 dias de idade.

2) Obtido do ensaio.

Tabela 7 - Resultados do Teste da Viga C1 (BUCKHOUSE, 1997).

Carga média na primeira fissura	20,4 kN
Carga média na ruptura	74,0 kN
Flecha média no meio da viga	9,27 cm
Tipo de Ruína	Ruptura do concreto à compressão

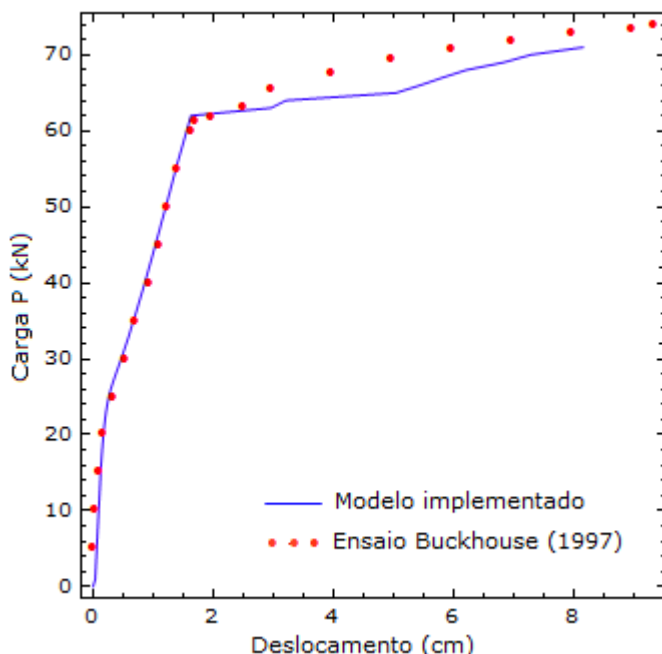


Figura 37 - Resultado comparativo entre o modelo implementado e o ensaio de Buckhouse (1997), viga C1. β_t variável de 1,84 a 1,81.

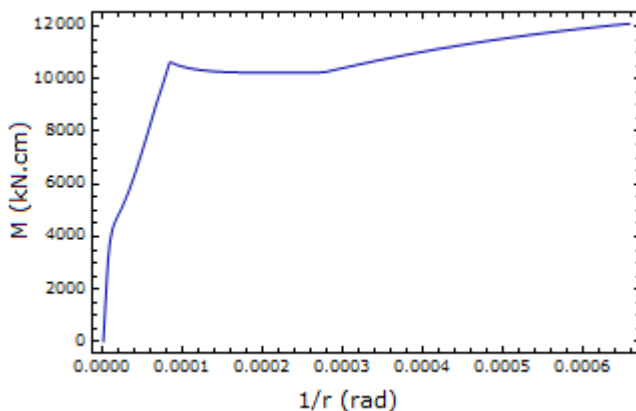


Figura 38 - Diagrama momento-curvatura da seção de concreto da viga C1, (BUCKHOUSE, 1997).

É importante destacar que o peso próprio da viga foi considerado no cálculo feito pelo modelo mecânico.

5.2.2 Ensaios de Beber (1999)

As vigas da série VT1 e VT2 de Beber (1999), ensaiadas sob flexão a quatro pontos, tinham seção de 12 x 25 cm e comprimento de 250 cm. Foram armadas com 2 barras de 10 mm de aço CA-50 na face inferior e 2 barras de 6 mm em aço CA-60 na face superior.

O cobrimento das armaduras, por não ter sido informado, foi adotado como 2,0 cm e o espaçamento entre as barras da armadura tracionada, medido transversalmente, 5,0 cm.

Os valores médios da resistência do concreto à compressão e à tração e o módulo de elasticidade longitudinal do concreto, na idade de realização dos ensaios, eram de 33 MPa, 2,85 MPa e 32,19 GPa, respectivamente.

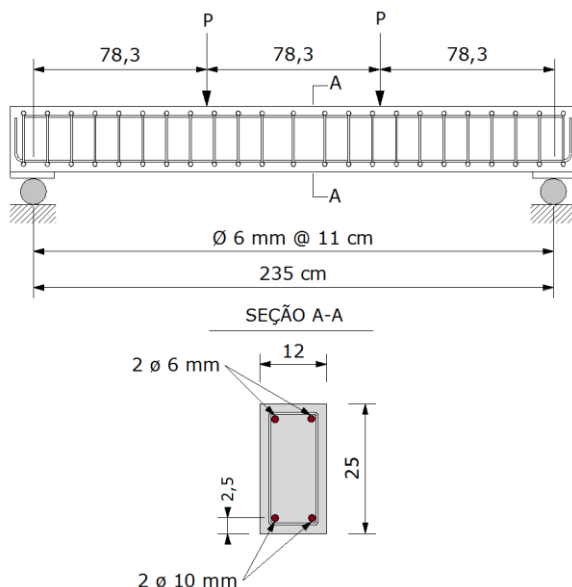


Figura 39 - Vigas experimentais VT1 e VT2, ensaiadas por Beber (1999).

As tensões de escoamento características do aço das armaduras eram de 565 MPa e 738 MPa, para os aços CA-50 e CA-60, respectivamente, e para o módulo de elasticidade longitudinal do aço 214,8 GPa. Estes dados foram obtidos dos ensaios.

Pode-se observar na Figura 40, que os resultados obtidos pelo modelo mecânico implementado estão em ótima concordância com os resultados experimentais. O modelo captura com ótima precisão, nesta

verificação, o comportamento da viga ensaiada até o ponto próximo ao escoamento. A partir dos resultados dos ensaios obteve-se o valor da carga média no início do escoamento, 44 kN (2 x 22 kN), para esta série de vigas. A carga média de ruptura experimental obtida no ensaio foi de 47 kN e a calculada pelo modelo implementado foi de 48,8 kN.

Nos ensaios não foram registrados os deslocamentos após o escoamento, porque os LVDT's foram retirados para não danificá-los.

Tabela 8 - Parâmetros das vigas experimentais VT1 e VT2 (BEBER, 1999).

Variável		Valor médio
Resistência à compressão média do concreto	f_{cm}	33.58 MPa
Resistência à tração média do concreto	$f_{ct,m}$	2.85 MPa
Módulo de elasticidade tangente do concreto	E_{ci}	32196 MPa
Armadura Inferior	A_{S2}	1,57 cm ²
Armadura superior	A_{S1}	0,56 cm ²
Tensão de escoamento do aço CA50	f_y	565 MPa
Tensão de escoamento do aço CA60	f_y	738 MPa
Módulo de elasticidade do aço	E_s	214830 MPa
Posição da armadura CG ¹	d'	2,6 cm
Largura da viga	b	12,4 cm
Altura da viga	h	25,16 cm
Vão da viga	L_0	235,4 cm

1) CG = Centro de gravidade em relação à face inferior da viga

Na comparação com este ensaio o parâmetro β_t do *tension-stiffening* variou de 2,09 a 2,06 em função da posição da linha neutra.

Neste estudo comparativo com os ensaios de Beber (1999) foi verificado que a propriedade do aço da armadura das vigas é de extrema importância para a precisão do modelo, especialmente no trecho final do ramo ascendente e no patamar de escoamento, bem como o ponto onde acontece a ruptura da viga, no gráfico carga-deslocamento.

O peso próprio da viga também foi considerado no cálculo feito pelo modelo mecânico.

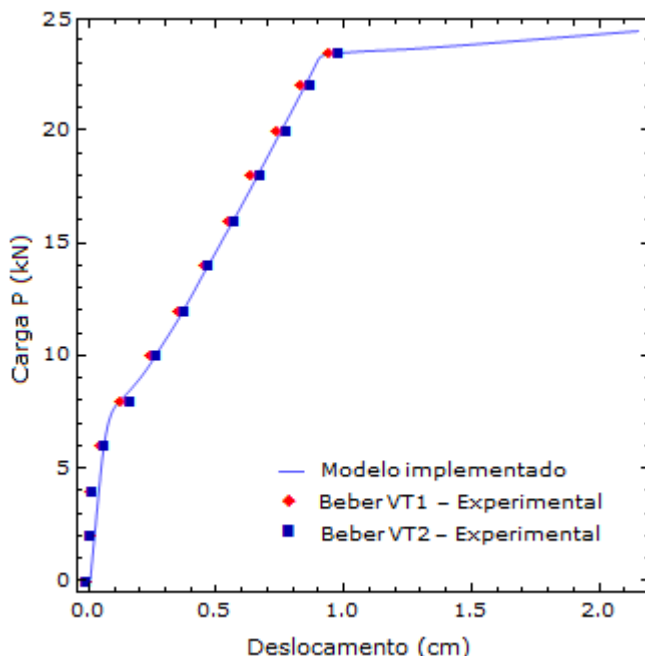


Figura 40 – Resultado comparativo entre o modelo implementado e os ensaios de Beber (1999), vigas VT1 e VT2. β_1 varia de 2,09 a 2,06.

5.2.3 Ensaios de Juvandes (1999)

Juvandes (1999) realizou ensaios em vigas de concreto armado para um estudo de reforço e reabilitação com materiais compostos. Foram feitos ensaios em três séries de vigas, denominadas tipo A, tipo B e tipo C. As vigas do tipo B totalizaram 4 vigas ensaiadas, denominadas de VB2, VB4, VB6 e VB 12.

Desta série de vigas do trabalho experimental de Juvandes (1999), foram escolhidas as vigas VB4 e VB6 para um estudo comparativo com o modelo implementado.

As vigas VB4 e VB6 possuíam seção de 7.5 x 15 cm e comprimento de 160 cm, apoiadas a 5 cm da extremidade, resultante em um vão livre de 150 cm. Estas vigas foram ensaiadas e submetidas à flexão em três pontos. Os valores médios da resistência do concreto à compressão e à tração e o módulo de elasticidade longitudinal do concreto, na idade de realização dos ensaios (43 dias), eram de 37.9 MPa, 2,9 MPa e 32,4 GPa (valor adotado), respectivamente.

Tabela 9–Parâmetros das vigas experimentais VB4 e VB6
(JUVANDES, 1999).

Variável		Valor médio
Resistência à compressão média do concreto	f_{cm}	38,1 MPa
Resistência à tração média do concreto	$f_{ct,m}$	3,6 MPa
Módulo de elasticidade do concreto	E_{ci}	32200 MPa
Armadura Inferior	A_{S2}	1,51 cm ²
Armadura superior	A_{S1}	0,14 cm ²
Tensão de escoamento do aço CA50 ¹	f_y	497 MPa
Tensão de escoamento do aço CA60 ¹	f_y	738 MPa
Módulo de elasticidade do aço ¹	E_s	174000 MPa
Posição da armadura CG ²	d'	1,0 cm
Largura da viga	b	7,5 cm
Altura da viga	h	15 cm
Vão da viga	L_o	150 cm

1) Propriedade das armaduras obtidas em Juvandes (1999), valor médio.

2) CG = Centro de gravidade em relação à face inferior da viga.

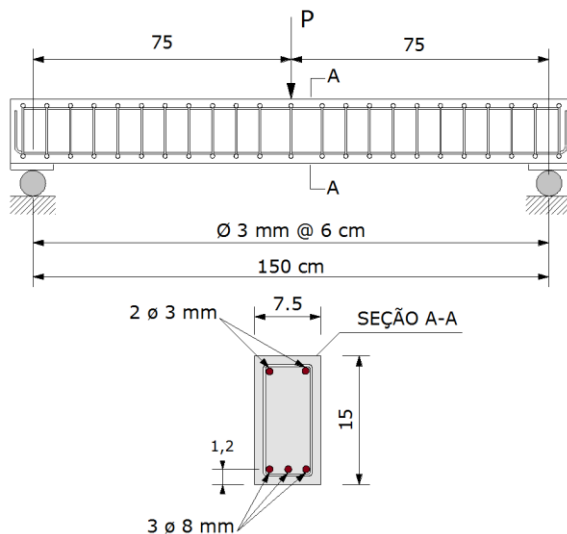


Figura 41 - Viga experimental VB4, ensaiada por Juvandes (1999).

Foram obtidos pelo autor, experimentalmente os valores das tensões de escoamento características de 497 MPa e 192 MPa para os aços CA-50 e CA-60, respectivamente, e, para o módulo de elasticidade longitudinal do aço, 174 GPa e 195 GPa.

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo modelo mecânico implementado estão em boa concordância com os resultados experimentais deste ensaio.

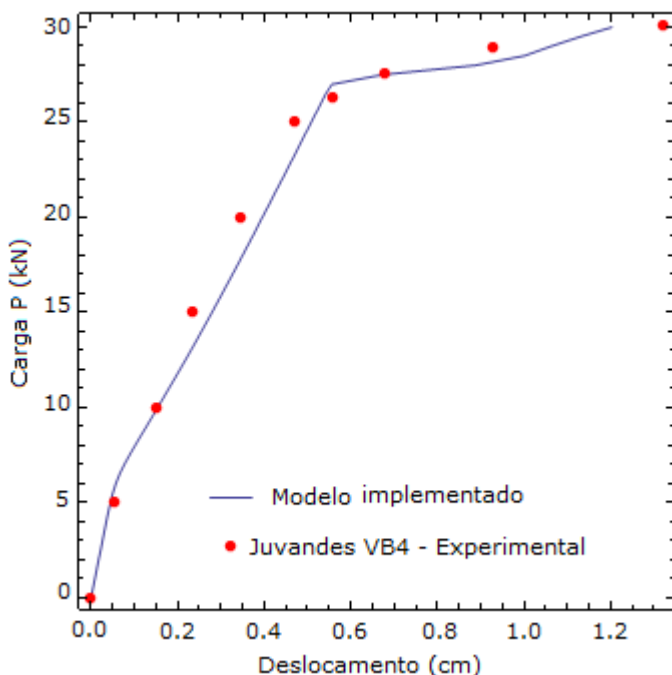


Figura 42 - Resultado comparativo entre o modelo implementado e os ensaios de Juvandes (1999), viga VB4. β_t varia de 2,62 a 2,58.

5.2.4 Ensaios de Álvares (1993)

Com o objetivo de pesquisar o comportamento de vigas de concreto armado à flexão, Álvares (1993) realizou um conjunto de ensaios em vigas de concreto armado biapoiadas, no laboratório de estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Os ensaios foram realizados com vigas simplesmente apoiadas submetidas a cargas concentradas nos terços do vão, como nos ensaios de Beber (1999). Foram executadas três séries de vigas (Série 1, 2 e 3), com a mesma

seção transversal de 12 x 30 cm, variando apenas a armadura longitudinal inferior, com 3, 5 e 7 barras de 10 mm de aço CA 50A.

Tabela 10 - Parâmetros das vigas experimentais V1 e V2, (ÁLVARES,1993).

Variável		Valor médio
Resistência à compressão média do concreto ¹	f_{cm}	24,0 MPa
Resistência à tração média do concreto ¹	f_{ctm}	2,68 MPa
Módulo de elasticidade tangente do concreto ¹	E_{ci}	24820 MPa
Armadura inferior	A_{S2}	2,40 cm ²
Armadura superior	A_{S1}	0,39 cm ²
Tensão de escoamento do aço ³ CA50	f_y	545 MPa
Tensão de escoamento do aço ³ CA60	f_y^3	660MPa
Módulo de elasticidade do aço	E_s	210000 MPa
Posição da armadura CG ²	d'	2,5 cm
Largura da viga	b	12 cm
Altura da viga	h	30 cm
Vão da viga	L_o	240 cm

1) Valores médios aos 28 dias.

2) CG = Centro de gravidade em relação à face inferior da viga

3) Valores médios obtidos com a NBR 6118 (2007), a partir dos valores característicos.

A armadura longitudinal e a taxa de armadura das vigas da série 1 foram, respectivamente, 3 barras de 10 mm e $\rho = 0,65\%$. Foi empregado o aço CA 50 na armadura inferior e duas barras de 5 mm de aço CA 60 na armadura superior.

Não foram informados os resultados de testes do aço, portanto as tensões de escoamento e o módulo de elasticidade das armaduras foram considerados com os valores médios destes tipos de aço. Os valores do módulo de elasticidade, a resistência à compressão e à tração do concreto foram obtidos dos ensaios realizados e fornecidos por Álvares (1993).

Dos resultados dos ensaios da série 1 de vigas as primeiras fissuras foram observadas para uma carga média de 8 kN,

correspondendo a um momento de fissuração de 6,4 kN.m. A partir dos resultados dos ensaios obteve-se o valor da carga média de ruptura para esta série de vigas, que foi de 40,8 kN.

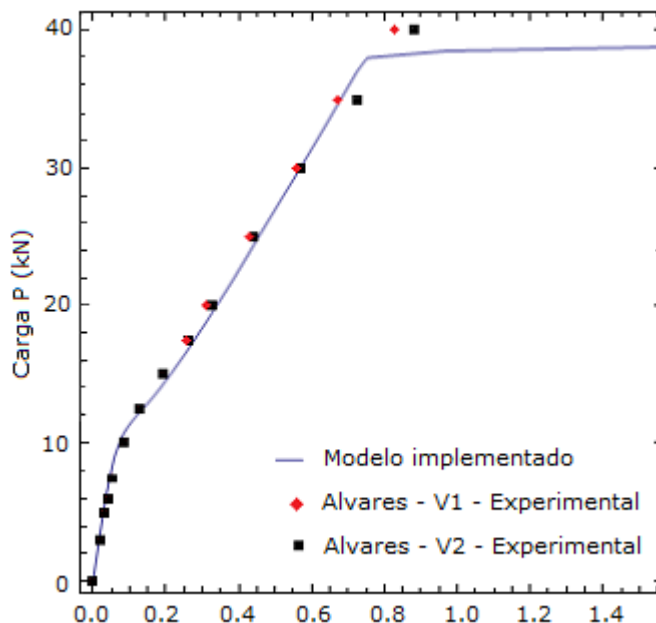


Figura 43 - Resultado comparativo entre o modelo implementado e os ensaios de Álvares (1993), vigas V1 e V2. β_t varia de 2,07 a 2,11.

A Figura 43 apresenta o resultado comparativo entre o modelo implementado e os ensaios da série 1 de Álvares (1993). O parâmetro β_t do *tension-stiffening* variou de 2,07 a 2,11 em função da posição da linha neutra. Pode-se observar que os resultados obtidos pelo modelo mecânico implementado estão em ótima concordância com os resultados experimentais deste ensaio experimental.

5.3 Vigas submetidas a cargas de longa duração

5.3.1 Introdução

Neste item serão realizados estudos comparativos do modelo implementado com resultados obtidos por ensaios experimentais e resultados obtidos por um modelo analítico.

Conforme Llinas (2001), a validação de um modelo de cálculo de flechas diferidas está submetido a inúmeras incertezas e geralmente não se conhece com detalhes as características dos materiais e os dados ambientais. Existe uma interação entre os diversos fenômenos que intervêm tais como a fissuração, a fluência, a retração, que, além disso, podem apresentar uma grande variabilidade, a qual dificulta o cálculo do modelo implementado.

5.3.2 Benchmarks propostos pelo RILEM

A base de dados experimentais propostas pelo Subcomitê do Comitê Técnico TC 114 do RILEM (ESPION 1993 apud. LLINÁS, 2002, p.102), cobre uma grande variedade de problemas práticos e teóricos e permite a comparação de procedimentos para a análise no tempo de estruturas de concreto.

Neste trabalho serão usados os dados experimentais correspondentes ao Benchmark nº1, “*Vigas simplesmente apoiadas de concreto armado*”. Estes ensaios foram feitos com sete vigas chatas similares de concreto armado, submetidas a cinco níveis de cargas permanente diferentes. No modelo numérico também foi considerado o peso próprio das vigas. O carregamento é correspondente a um ensaio a quatro pontos, com duas cargas ($P/2$) equidistantes do centro da viga, conforme mostrado na Figura 44.

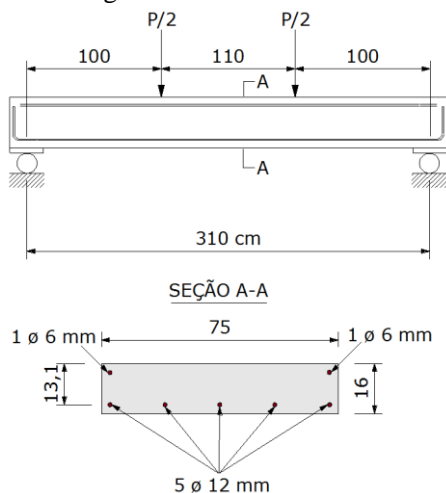


Figura 44 – Características das vigas do *benchmark* proposto pelo RILEM.

As flechas apresentadas foram medidas no meio da viga. As vigas foram curadas até os sete dias e em seguida mantidas em condições de umidade de 60% e temperatura constante de 20^o C.

A carga foi aplicada aos 28 dias e mantida constante até o dia 538 para as vigas C15, C14, C13 e C12. Estas foram as vigas escolhidas para o estudo comparativo neste trabalho.

Tabela 11 - Resultados das flechas no tempo.

Viga		Tempo (dias)					Carga [kN]	f _{cm} [MPa]
		0	1	10	100	510		
C15	Ensaio	11,0	13,0	14,6	18,1	20,7	31,5	29,3
	Modelo	10,7	14,1	15,5	18,9	21,2		
C14	Ensaio	8,3	9,9	-	15,0	18,1	25,1	29,4
	Modelo	7,4	8,2	9,4	12,8	15,2		
C13	Ensaio	5,6	6,6	8,2	10,9	13,6	18,6	30,9
	Modelo	2,4	4,5	5,4	8,6	11,0		
C12	Ensaio	2,2	2,9	3,9	6,1	8,3	12,2	29,4
	Modelo	1,5	2,8	3,4	5,4	8,0		

Na Tabela 12 são apresentados os resultados obtidos pelo modelo numérico junto com os resultados dos ensaios, as cargas concentradas aplicadas e a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias como dado fornecido pelo ensaio.

Tabela 12 - Flechas aos 538 dias em mm - Diversos métodos (Fonte LLINAS, 2001).

	Ensaio	Modelo numérico	Llinas	Bilinear (Jaccoud e Favre)	Bilinear (Espion)	ACI (Espion)
C15	20,7	21,2	20,2	19,4	18,6	21,3
C14	18,1	15,2	16,6	16,0	14,9	12,7
C13	13,6	11,0	12,1	12,9	11,1	5,9
C12	8,3	8,0	8,4	9,0	8,2	3,6

5.3.3 Comparativo com a norma NBR 6118 (2007)

Neste item será realizado um estudo comparativo do modelo implementado com resultados obtidos pelo método da rigidez equivalente. A metodologia mais usada tem sido a da rigidez equivalente de Branson (1968) para o cálculo direto das flechas imediatas. Para a flecha diferida são utilizados coeficientes que levam em consideração a duração de aplicação do carregamento e a quantidade de armadura comprimida. Este é o método indicado pela NBR 6118 (2007). Neste procedimento a determinação da flecha de longa duração depende somente da flecha inicial (ou imediata), da idade do concreto e da quantidade de armadura comprimida existente. Este procedimento não é vinculado ao modelo de fluência da mesma norma.

Será analisado o comportamento imediato e diferido de uma viga biapoiada de seção retangular especificada na Figura 45. A viga possui um vão de 6 m e está submetida a uma carregamento de serviço com duas cargas concentradas de 20 kN. As propriedades dos materiais estão indicados na Tabela 13 e as armaduras mostradas na figura abaixo.

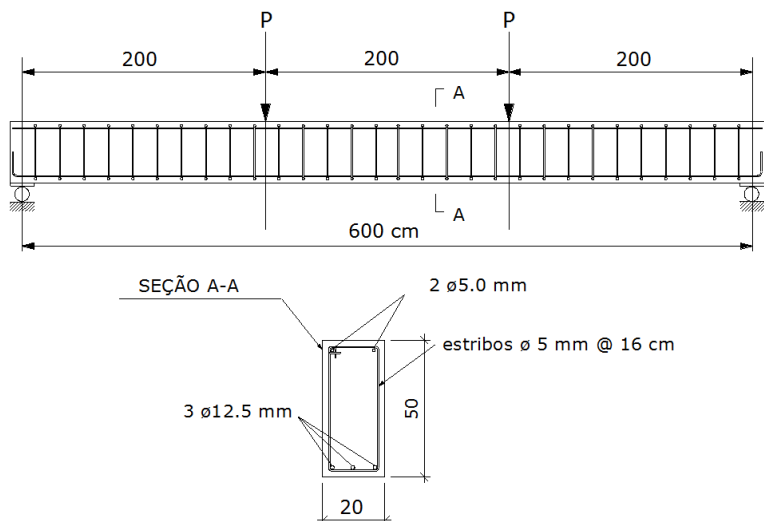


Figura 45 – Viga dimensionada de acordo com a NBR 6118(2007).

A viga foi dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007) com base na capacidade última ELU e verificada ao ELS para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_0 = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos.

Além das verificações dos estados limites de formação e de abertura de fissuras, o estado limite de deformações excessivas foi verificado de acordo com o item 13.3 da NBR 6118 (2007). Esta verificação utilizou os deslocamentos limites (valores práticos) do grupo “a” (aceitabilidade sensorial) estabelecidos na tabela 13.2 e a abertura limite de fissuras de 0,3 mm correspondente a classe de agressividade ambiental CAA II para concreto armado.

A carga accidental quase permanente foi considerada para o caso de uma edificação de uso residencial, e com um coeficiente $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 70% (Ur). O tipo de cimento considerado foi o CP I e o abatimento do concreto igual a 6 cm.

Tabela 13 – Propriedades do concreto e do aço.

Classe (2)	Concreto			Armadura		
	f_{cm}^I (MPa)	f_{ck} (MPa)	$f_{ct,m}^I$ (MPa)	E_{ci}^I (MPa)	f_{ym} (MPa)	f_{um} (MPa)
C25	31,6	25	2,56	28000	500	640

A Figura 46 apresenta o gráfico com a carga-deslocamento (flecha no meio da viga) para a viga da Figura 45. São apresentados os resultados do modelo implementado para a flecha imediata sem a consideração da retração e com a retração, e também o resultado da curva carga-deslocamento obtida com o procedimento simplificado da NBR 6118 (2007).

Este procedimento não considera o efeito da retração no cálculo da flecha imediata. Este efeito parece que é considerado no cálculo da flecha adicional diferida recomendado pela mesma norma, porém não é mencionado no seu texto. A NBR 6118 (2007) diz apenas que a flecha adicional diferida é calculada em função da fluência.

A NBR 6118 (2007) também não informa a condição padrão (parâmetros de umidade relativa do ambiente, tipo de cimento e abatimento do concreto) para a qual o fator α_f de multiplicação da flecha imediata está referenciado.

Pode-se inferir, entretanto, que o cálculo da NBR 6118 (2007) leva em consideração a fluência e a retração pelo fato do ACI 318 (2008) informar isto explicitamente no item 9.5.2.5, e pelo fato das expressões para o fator α_f de multiplicação da flecha imediata, eq. (5), e

também as expressões para os coeficientes, serem as mesmas nas duas normas.

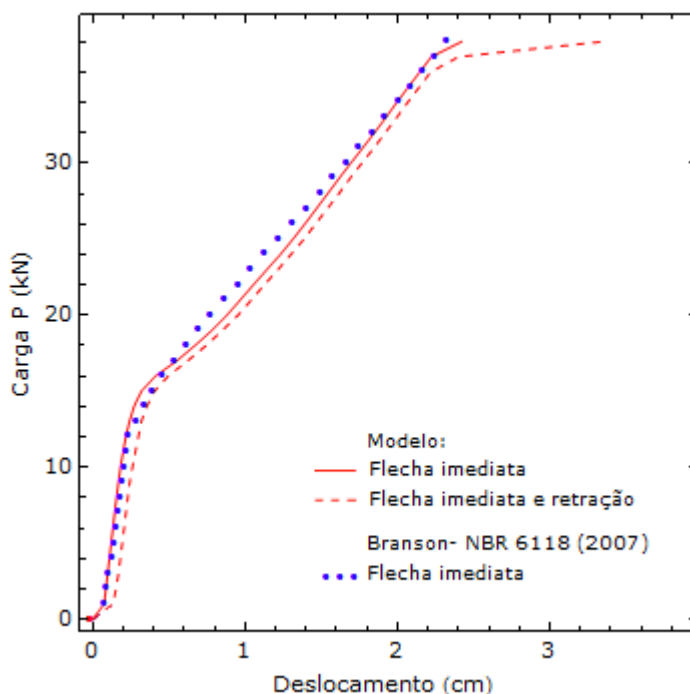


Figura 46 - Diagrama Carga – deslocamento Modelo implementado e Branson - NBR 6118 (2007). Coeficiente β_t variando de 1,89 a 1,92.

Na Figura 47 são apresentados os resultados dos diagramas carga-deslocamento obtidos pelo modelo mecânico implementado neste trabalho e o método simplificado adotado na NBR 6118 (2007) para os deslocamentos imediatos sem a retração, imediatos com a consideração da retração e deslocamentos totais com a consideração da retração e a fluência.

Os diagramas foram calculados para um período de 50 anos. Foram calculados diversos diagramas carga-deslocamento com o modelo implementado, variando os parâmetros de umidade relativa do ambiente, tipo de cimento e abatimento do concreto. O resultado do diagrama mostrado na Figura 47 foi o que apresentou o resultado mais próximo do modelo simplificado da NBR 6118 (2007).

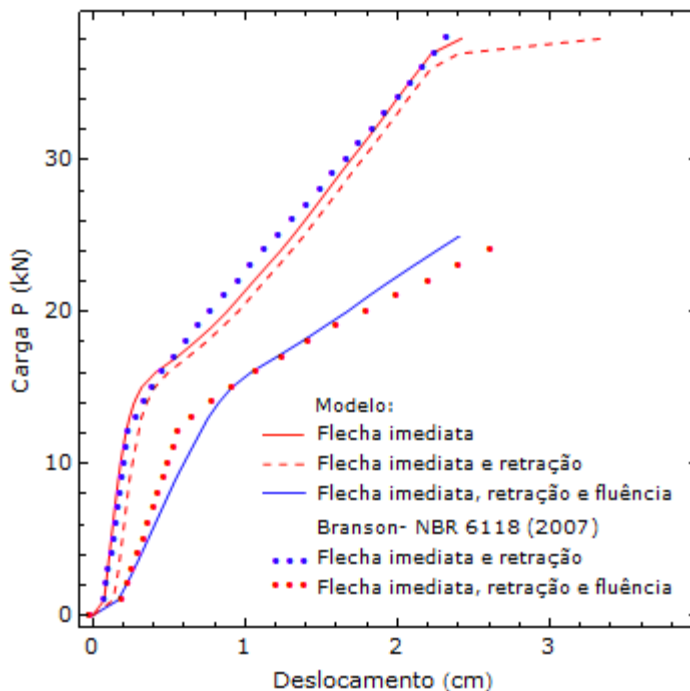


Figura 47 - Diagrama carga-deslocamento, modelo implementado e Branson - NBR 6118 (2007). Flechas imediatas, retração e flechas totais (50 anos).

6. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

6.1 Introdução

Do ponto de vista probabilístico, projetar novas estruturas, ou aceitar as existentes como suficientemente seguras, é o resultado de um processo de tomada de decisão guiado por certos critérios de otimização.

Este processo conecta, de uma maneira lógica e consistente, as necessidades e expectativas do cliente ou proprietário da estrutura, os carregamentos e as ações que podem atuar na estrutura, as características dos materiais a serem usados ou encontrados na estrutura existente, os modelos de cálculo, os níveis de mão-de-obra esperados ou observados no canteiro, o comportamento dos usuários, e finalmente, em um caso ideal, os cuidados da sociedade com o impacto ambiental e o crescimento sustentado.

As estruturas e os elementos estruturais devem ser projetados, construídos e mantidos de tal modo que funcionem adequadamente durante toda a sua vida útil e ainda de forma econômica. De um modo geral as estruturas deverão atender, com níveis adequados de confiabilidade, aos seguintes requisitos:

- estados limites últimos
- estados limites de serviço
- durabilidade

Os estados limites são divididos em duas categorias básicas, os estados limites últimos (ELU), que levam em consideração a capacidade de carga máxima e os estados limites de serviço (ELS), que levam em consideração o uso normal da estrutura.

De um modo geral as prescrições normativas para o ELU tendem a ser fundamentadas em considerações de confiabilidade estrutural, com a calibração dos coeficientes de ponderação com índices de confiabilidade alvos. A calibração de uma norma é um método de confiabilidade usado para se obter um desempenho mais uniforme no projeto de estruturas para diferentes materiais construtivos, pode-se dizer que é um procedimento de otimização de normas.

De acordo com o JCSS – *Probabilistic Model Code* (2000), a expressão "com níveis de confiabilidade adequados" significa que o grau de confiabilidade adotado deverá ser adaptado ao uso da estrutura, ao tipo de estrutura ou elemento estrutural, situação de projeto etc.

A escolha de diversos níveis de confiabilidade deverá levar em consideração as possíveis consequências do colapso em termos de risco

para a vida ou ferimentos de pessoas envolvidas, as potenciais perdas econômicas e o grau de inconveniência social. Deverá também levar em consideração a quantidade de esforço necessário para reduzir o risco de colapso.

Em geral, os projetos de engenharia consistem no dimensionamento dos elementos de um sistema de tal modo que eles satisfaçam diversos critérios quando submetidos a diversas demandas. No entanto, existem inúmeras fontes de incertezas nos parâmetros relacionados com a demanda e a capacidade deste sistema que dificultam o atendimento destas necessidades de projeto.

A análise de confiabilidade estrutural fornece, então, medidas da segurança das estruturas levando em consideração estas incertezas, tais como as solicitações, as propriedades dos materiais e os parâmetros geométricos. Esta abordagem é mais eficiente do que o procedimento tradicional de coeficientes de segurança do Método das Tensões Admissíveis.

De acordo com Nowak e Collins (2000), o objetivo de uma norma de projeto é fornecer um nível mínimo de segurança. Dependendo do procedimento adotado para considerar a confiabilidade em projetos, Madsen *et al.* (1986) classificam estes procedimentos em quatro categorias de normas de projeto:

- Nível I – As normas deste tipo usam fórmulas determinísticas. A margem de segurança é introduzida com um coeficiente de segurança sobre a resistência e a carga de projeto ou com a utilização de coeficientes parciais de ponderação aplicados sobre as resistências e as ações.
- Nível II – Normas deste tipo definem o critério de aceitação de projeto em termos de proximidade do índice de confiabilidade real para um projeto em relação ao índice de confiabilidade alvo.
- Nível III – Normas deste tipo requerem uma análise de confiabilidade completa para determinar a probabilidade de falha da estrutura submetida a várias combinações de carregamento. O critério de aceitação é definido em termos de proximidade do índice de confiabilidade calculado em relação ao índice ótimo de confiabilidade (ou probabilidade de falha).
- Nível IV - Normas deste tipo usam o custo esperado do projeto como um critério de otimização. O projeto aceitável maximiza a função de utilidade, a qual descreve as diferenças entre os benefícios e os custos associados com um determinado projeto.

6.2 O problema básico de confiabilidade

O problema básico de confiabilidade estrutural considera somente um efeito de carga S e uma resistência R . Cada um descrito com uma função de densidade de probabilidade de uma variável contínua conhecida, $f_S(s)$ e $f_R(r)$ respectivamente. A função de densidade de probabilidade, abreviada geralmente como PDF, especifica a lei de probabilidades para uma variável aleatória contínua (MELCHER, 2002).

No caso da análise no estado limite de deformação excessiva (DEF) S será a flecha em serviço e R uma das flechas limites. A probabilidade de falha pode então ser estabelecida por uma função denominada função de falha, do tipo:

$$P_f = P([R - S] \leq 0) \quad (144)$$

ou em geral, onde $G[R - S]$ é denominada equação ou função de estado limite, conforme mostrado na Figura 48:

$$P_f = P(G[R - S] \leq 0) \quad (145)$$

$$P_f = P(G[R - S] \leq 0) = \int_D \int f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (146)$$

Quando R e S são variáveis independentes, $f_{R,S}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s)$ e a probabilidade de falha torna-se:

$$P_f = P(G[R - S] \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^S f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (147)$$

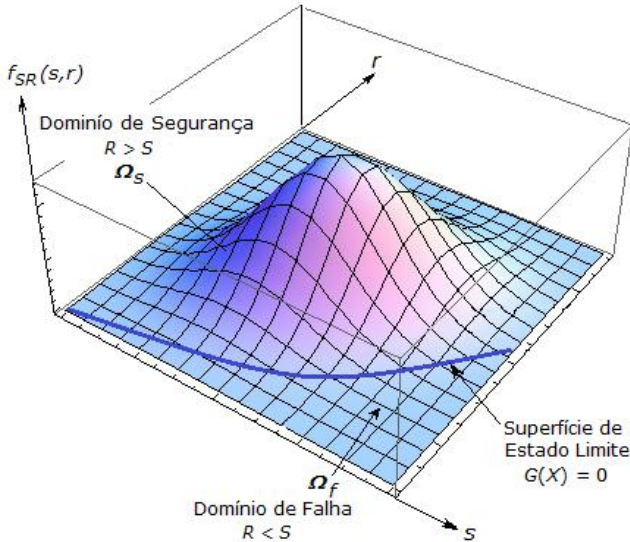


Figura 48 - Definição do domínio de falha.

Para qualquer variável aleatória X , a função de distribuição de probabilidade acumulada é:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) \cdot dy \quad (148)$$

desde que $x \geq y$, para o caso mais comum e quando R e S são independentes a equação anterior pode ser escrita como uma integral simples, conhecida como integral de convolução:

$$P_f = P(R - S) \leq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (149)$$

Conforme Melcher (2002), uma alternativa para a eq. (149), que simplesmente é a soma das probabilidades de falha sobre todos os casos de resistência nos quais a solicitação excede a resistência, é a seguinte:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(x)] \cdot f_R(x) dx \quad (150)$$

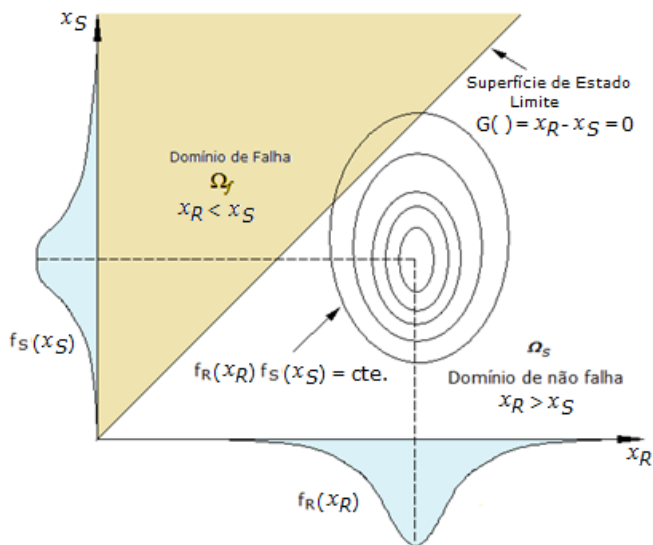


Figura 49 – Problema básico de confiabilidade R-S.

6.3 Variáveis aleatórias normais

Para poucas distribuições de R e S é possível obter a integral de convolução analiticamente. O exemplo mais notável é quando R e S são variáveis normais com média μ_R e μ_S e desvios padrões σ_R e σ_S , respectivamente. A margem de segurança $Z = (R - S)$ neste caso possui média e desvio padrão igual a:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (151)$$

Considerando a independência entre R e S o desvio padrão de Z é:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (152)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (153)$$

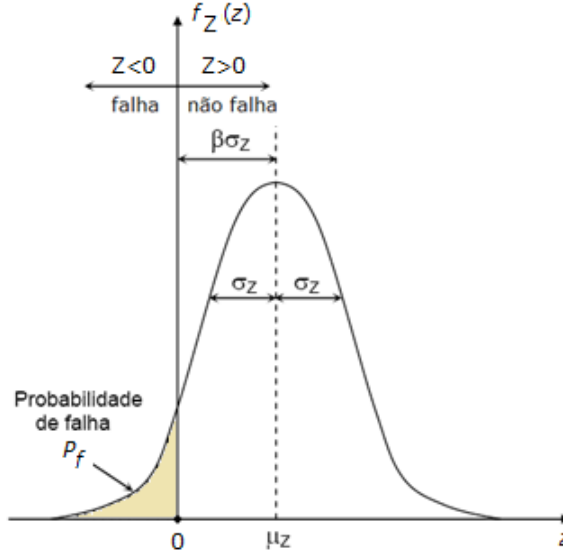


Figura 50 – Distribuição da margem de segurança $Z = R - S$. Fonte: Adaptado de Melcher (2002).

A distribuição de Z pode ser transformada em uma distribuição normal padrão Y , com média zero e desvio padrão unitário, por meio da seguinte equação:

$$Y = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \quad (154)$$

Esta transformação permite uma comparação dos valores de Z com os valores de probabilidade da distribuição normal padrão acumulada $\Phi(y)$. Com estas equações obtém-se, conforme Cornell (1969), uma medida da probabilidade de falha:

$$P_f = \Phi \left[\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = \Phi(-\beta) \quad (155)$$

Com a variável Y normalizada, portanto, obtém-se uma medida de probabilidade de falha da estrutura. Esta medida é dada pela distância

entre o ponto que define a falha e a origem na distribuição da variável reduzida Y e é chamada de índice de confiabilidade β .

O índice de confiabilidade β de Cornell (1969) é o valor absoluto da ordenada do ponto correspondente a $Z = 0$ no gráfico de probabilidades normal padrão conforme mostrado na Figura 50 e a equação:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (156)$$

ou ainda:

$$\beta = \frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (157)$$

Devido à falta de invariância, característica do índice de confiabilidade β de Cornell, Hasofer, Lind, *apud* Melcher (2002), propuseram escolher um espaço de funções normais Gaussianas (média nula, desvio padrão unitário, $N(0,1)$) para representar a definição de β independente da representação no espaço físico. Este espaço é denominado *espaço reduzido* ou *espaço normal padrão*.

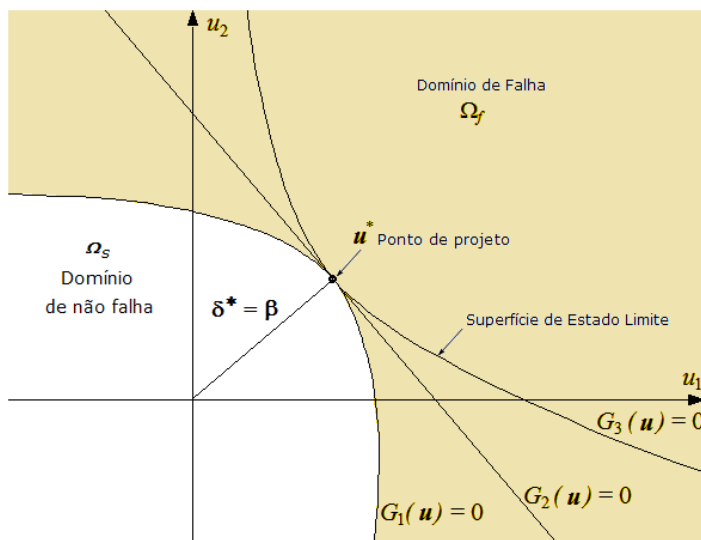


Figura 51 – Índice de confiabilidade de Hasofer-Lind.

No espaço normal padrão a variável aleatória X é representada pela variável obedecendo à seguinte relação:

$$G(u_i) = G(T_{(x_i)}) = 0 \quad (158)$$

O índice de confiabilidade é corretamente definido como a menor distância (δ^*) da origem à $G(u_i(x_i)) = 0$ onde G é a superfície de ruína. Como a função de estado limite geralmente é não linear, o ponto de projeto não é conhecido previamente e precisa ser encontrado pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\beta = \min_{u \in \{g(u)=0\}} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)} \quad \text{com } G(u_i) \leq 0 \quad (159)$$

O ponto de ruína mais provável, definido com o retorno das coordenadas ótimas no espaço normal padrão u para o espaço físico x , é chamado de ponto de projeto (u^*). Conforme Beck (2011), “o índice de confiabilidade β é uma medida geométrica da probabilidade de falha, que corresponde à mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão”.

O índice de confiabilidade ou coeficiente β tem sido usado como uma medida padrão de confiabilidade em engenharia. Valores usuais de β em muitas aplicações de engenharia variam de 1.3 a 5.2 e correspondem a probabilidades de falha que variam de 10^{-1} a 10^{-7} .

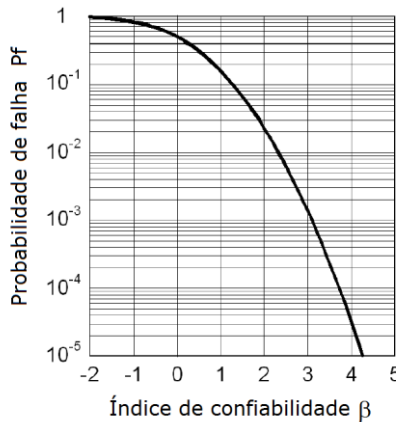


Figura 52 - Relação entre o índice de confiabilidade, β , e a probabilidade de falha P_f .

Tabela 14 - Relação entre a probabilidade de falha P_f e o coeficiente β

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
β	1.3	2.3	3.1	3.7

Na indústria aeronáutica é comum falar-se em uma confiabilidade de *four nines* ou quatro nove, que significa uma $P_s = 1 - P_f$ ou

probabilidade de falha complementar de 0.9999 ou a uma $P_f = 10^{-4}$, que equivale a um índice de confiabilidade $\beta = 3.7$, calibrado para uma consequência de falha Classe 3 (consequências da falha - elevadas). A Figura 52 e a Tabela 15 apresentam relações entre valores de β e a probabilidade de falha.

Tabela 15 – Relação entre β e a probabilidade de falha P_f

β	P_f	β	P_f
-2	0.9772	0.6	0.2743
-1.9	0.9713	0.7	0.2420
-1.8	0.9640	0.8	0.2119
-1.7	0.9554	0.9	0.1841
-1.6	0.9452	1.	0.1587
-1.5	0.9332	1.1	0.1357
-1.4	0.9192	1.2	0.1151
-1.3	0.9032	1.3	0.0968
-1.2	0.8849	1.4	0.0808
-1.1	0.8643	1.5	0.0668
-1.0	0.8413	1.6	0.0548
-0.9	0.8159	1.7	0.0446
-0.8	0.7881	1.8	0.0359
-0.7	0.7580	1.9	0.0287
-0.6	0.7257	2.	0.0228
-0.5	0.6915	2.1	0.0179
-0.4	0.6554	2.2	0.0139
-0.3	0.6179	2.3	0.0107
-0.2	0.5793	2.4	0.0082
-0.1	0.5398	2.5	0.0062
0	0.5000	2.6	0.0047
0.1	0.4602	2.7	0.0035
0.2	0.4207	2.8	0.0026
0.3	0.3821	2.9	0.0019
0.4	0.3446	3.	0.0013
0.5	0.3085	3.1	0.0010

6.4 O problema geral de confiabilidade

Para muitos problemas de confiabilidade a formulação simples mostrada no item 6.3 não é inteiramente adequada, porque nem sempre pode ser possível reduzir o problema para uma formulação simples $R-S$ formulada com variáveis aleatórias independentes. Com as variáveis básicas de projeto, as quais definem e caracterizam o comportamento e a segurança de uma estrutura e as suas distribuições de probabilidade, é possível apresentar uma versão generalizada da equação de estado limite.

Seja o vetor X que representa as variáveis básicas de projeto, a resistência R pode ser representada como $R = G_R(X)$ e os efeitos do carregamento e ações como $S = G_S(X)$. Como as funções G_R e G_S podem ser não lineares, a função de distribuição acumulada $F_R(r)$, por exemplo, pode ser obtida pela integração múltipla sobre as variáveis de projeto relevantes, (MELCHER, 2002):

$$F_R(r) = \int_r \dots \int f_X(x) dx \quad (160)$$

Uma expressão similar pode ser obtida para S e $F_S(\cdot)$. Estas expressões podem ser usadas nas equações (149) e (150).

A função de estado limite, $P[G(R,S) \leq 0]$, também pode ser generalizada. Quando as funções $G_R(X)$ e $G_S(X)$ são usadas em $G(R,S)$, a função de estado limite resultante pode ser escrita simplesmente como $G(X)$, onde X é o vetor de todas as variáveis básicas relevantes e $G(\cdot)$ é alguma função que expressa a relação entre o estado limite e as variáveis básicas. A equação de estado limite $G(X) = 0$ define a fronteira entre o domínio de não falha $G > 0$ e o domínio de falha $G \leq 0$ no espaço de n dimensões das variáveis básicas de projeto.

Com a equação de estado limite escrita como $G(X)$, a generalização da eq.(146) torna-se:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] = \int \dots \int_{G(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad (161)$$

A função $f_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta do vetor n -dimensional X das variáveis de projeto. A região de integração $G(X) \leq 0$ define o espaço de violação do estado limite e é diretamente análoga ao domínio de falha Ω_f mostrado na Figura 48 e na Figura 49.

Com exceção de alguns casos particulares, a integração da eq.(161) multifuncional sobre o domínio de falha integração $G(X) \leq 0$ não pode ser obtida analiticamente.

Existem essencialmente três modos pelo qual a integração da equação multifuncional eq.(161) pode ser feita:

- 1) integração direta (possível somente em alguns casos).
- 2) integração numérica, com o procedimento de Monte Carlo.
- 3) reduzindo a integração por meio de uma transformação do integrando em uma função de densidade de probabilidade multi-normal conjunta para a qual alguns resultados especiais podem ser imediatamente obtidos.

6.5 Confiabilidade alvo

O critério de aceitação do risco estrutural em termos de confiabilidade corresponde a uma confiabilidade mínima requerida definida como confiabilidade alvo. Os requisitos necessários para a segurança de uma estrutura são por consequência expressos em termos de um índice de confiabilidade mínimo ou de uma probabilidade máxima de falha aceitável.

Conforme Almeida (2008) as normas brasileiras ainda não regulamentaram a verificação dos níveis de confiabilidade requeridos para as estruturas.

Em uma análise racional a confiabilidade alvo β_T é considerada como um parâmetro de controle sujeito à otimização. A questão é que em uma otimização econômica o índice alvo depende das consequências de falha e dos custos relativos para aumentar a segurança. Por isso o *Joint Commitee on Structural Safety*, JCSS (2000) estabelece classes de consequências que são baseadas em uma relação entre os custos totais de construção somados aos custos de reconstrução ou recuperação de uma falha pelos custos de construção.

- 1) Classe 1: O risco de morte, devido à falha, é pequeno ou desprezável e as consequências econômicas são pequenas ou desprezáveis (ex. edificações para usos na agricultura, silos e postes).
- 2) Classe 2: O risco de morte, devido à falha, é médio e as consequências econômicas são consideráveis (ex. edificações residenciais, para escritórios e para indústrias).
- 3) Classe 3: O risco de morte, devido à falha, é alto e as consequências econômicas são significativas (ex.: pontes importantes, teatros, hospitais e edifícios altos).

Deve-se levar em consideração que as consequências de falha também dependem do tipo de falha, que podem ser do tipo dúctil com uma reserva de capacidade devido ao material, do tipo dúctil sem

reserva de capacidade e do tipo frágil. Por isso, os elementos estruturais capazes de entrar em colapso de forma explosiva, sem aviso, devem ser projetados para um nível de confiabilidade mais alto do que aqueles em que o colapso é precedido por um aviso para que sejam adotadas medidas que evitem consequências mais catastróficas. Valores para índices de confiabilidade alvo β_T para os estados limites últimos propostos pelo JCSS (2000) são apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 – Índices de confiabilidade alvo β_T (e as probabilidades de falha associadas) relativas a um ano de período de referência para os estados limites últimos (ELU), (JCSS, 2000).

Custo relativo da medida de segurança	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Alto (A)	$\beta_T = 3,1$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-3}$)	$\beta_T = 3,3$ ($P_f \approx 5 \times 10^{-4}$)	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-4}$)
Normal (B)	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-4}$)	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5 \times 10^{-6}$)
Pequeno (C)	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5 \times 10^{-6}$)	$\beta_T = 4,7$ ($P_f \approx 1 \times 10^{-6}$)

O EN 1990 (2002), também define, como o JCSS (2000), índices de confiabilidade para três níveis de classes de consequência (CC1, CC2 e CC3) e estabelece os valores mínimos de índices de confiabilidade relacionados com estas classes de consequências e confiabilidade para os estados limites últimos (ELU) e os estados limites serviço (ELS), conforme mostrado na Tabela 17.

Tabela 17 - Índices de confiabilidade alvo mínimos β_T recomendados pelo EN 1990:2002

Classe ²	Valores mínimos para β_T			
	Período de referência de 1 ano		Período de referência de 50 anos	
	ELU	ELS	ELU	ELS
CC3	5,2	nr ¹	4,3	nr ¹
CC2	4,7	2,9	4,7	1,5
CC1	4,2	nr ¹	3,3	nr ¹

1) Nenhuma recomendação especificada pelas normas.

Esta norma utiliza um valor de $\beta_T = 1,5$ independente do tipo do estado limite de serviço ELS. Nesta tabela também são feitas correspondências com os períodos de referência de 1 ano e 50 anos.

Pela superposição entre os custos de construção e os custos de manutenção, o LIFECOM (2003) também determinou a confiabilidade ótima a partir de um ponto de vista econômico. A Tabela 18 apresenta estes índices de confiabilidade alvo mínimos para o estado limite de serviço. Segundo o LIFECOM (2003) estes índices são referentes ao período de referência de vida útil da estrutura e baseados em um fator de proporcionalidade, calculado pela razão entre o custo para a minimização do risco e o custo da recuperação da estrutura causados pela falha por violação do estado limite de serviço. Os custos para a minimização do risco incluem todos os custos necessários para se obter proteção adicional, como por exemplo, aumento da altura das vigas, aumento do cobrimento de concreto etc.

Para a definição de índices de confiabilidade alvos β_T para os estados limites de serviço é feita uma distinção entre estados limites irreversíveis e reversíveis.

Tabela 18 – Índices de confiabilidade alvo β_T relativos ao período de vida útil para estados limites de serviço irreversíveis e a probabilidade de falha associada (LIFECOM 2003).

Fator de proporcionalidade	Coefficiente alvo β_T
Baixo	2.0 ($P_f \approx 0,02$)
Normal	1.5 ($P_f \approx 0,07$)
Alto	1.0 ($P_f \approx 0,15$)

A Tabela 19 apresenta os índices de confiabilidade alvos β_T (associados às taxas de falha alvo) recomendados pelo JCSS (2000) relativos a um ano de período de referência e estados limites de serviço irreversíveis.

Tabela 19 – Índices de confiabilidade alvos do JCSS (2000) para o ELS.

Custo relativo da medida de segurança	Coefficiente β_T alvo (ELS irreversível)
Alto (A)	$\beta_T = 1,3$ ($P_f \approx 0,1$)
Normal (B)	$\beta_T = 1,7$ ($P_f \approx 0,05$)
Pequeno (C)	$\beta_T = 2,3$ ($P_f \approx 0,01$)

6.6 Confiabilidade estrutural em serviço

Flechas excessivas em vigas de concreto armado podem causar danos aos elementos não estruturais da edificação, tais como paredes de fechamento em alvenaria, divisórias, esquadrias etc.; podem afetar a aparência da edificação (deformações visíveis dos pisos e coberturas) causando desconforto aos usuários; e causar efeitos estruturais em serviço, como por exemplo, em pisos que devem estar perfeitamente planos, em superfícies que drenam a água.

Flechas excessivas podem causar também efeitos nos elementos estruturais, se os deslocamentos forem importantes e prejudicarem as hipóteses relativas ao modelo de cálculo adotado. Por isso as normas de projeto, como a norma brasileira, procuram limitar os deslocamentos especificando valores limites para a verificação em serviço das estruturas.

A NBR 8681 (2003) estabelece no seu item 5.2 as condições relativas aos estados limites de utilização e prescreve que, “As condições usuais de verificação da segurança relativas aos estados limites de utilização são expressas por desigualdades do tipo”:

$$S_d \geq S_{lim} \quad (162)$$

onde S_d corresponde aos valores de cálculo dos efeitos estruturais de interesse calculados com $\gamma_f = 1,0$, e S_{lim} corresponde aos valores adotados para esses efeitos. (S_{lim} representa valores de flechas limites, aberturas máximas de fissuras em peças de concreto etc.).

Para permitir a aplicação dos métodos de confiabilidade estrutural no projeto de vigas de concreto em serviço, poder-se-ia definir que uma falha em serviço ocorre quando os deslocamentos da viga excedem os deslocamentos limites especificados por uma norma de projeto, como os definidos pela NBR 8681 (2003) e a NBR 6118 (2007). Como não existe nenhuma informação a respeito da variabilidade destes valores limites, eles serão considerados como valores determinísticos. Neste estudo a falha em serviço é definida quando o deslocamento δ (ou flecha) ultrapassa um deslocamento limite. Para lajes e vigas que não suportam elementos que podem ser danificados por grandes deformações, o deslocamento δ não deve ultrapassar $L/250$, para o caso de aceitabilidade sensorial (Tabela 20), de acordo com a NBR-6118 (2007) onde L é o vão da viga ou da laje. O ACI 318 (ACI 2005) também utiliza um limite similar, $L/240$.

Hossainand e Stewart (2001) revisaram a base de dados de registros de danos devidos à percepção visual (significativa), desaprimento de móveis, danos em acabamento de pisos e danos em elementos não

estruturais (paredes divisórias). Segundo este estudo, o valor mínimo da relação δ/δ_{lim} para o qual o dano percebido foi relatado é 0,003 ($\approx 1 / 333$).

Tabela 20 – Limites para deslocamento – Aceitabilidade sensorial
(Fonte NBR 6118, 2007).

Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$L/250$
Vibrações sentidas no piso	Devido às cargas acidentais	$L/350$

- 1) Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.
- 2) Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.
- 3) O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na seção 11 da NBR 6118 (2007).
- 4) Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contra flechas.

A probabilidade de falha P_f para o caso de flechas excessivas será então expressa com uma função G de tal modo que a estrutura não falha se $G > 0$ e falha se $G < 0$, conforme apresentado no item 6.2.

Conforme Dimitriad e Chernin (2009), a probabilidade de falha em serviço pode ser calculada por:

$$P_f = Pr[\delta_{lim} - \delta < 0] \quad (163)$$

Se a função G é normalmente distribuída, o coeficiente de confiabilidade β é então calculado por:

$$P_f = \Phi(-\beta); \quad \beta = \Phi^{-1}(P_f) \quad (164)$$

onde $\Phi(-\beta)$ e $\Phi^{-1}(-\beta)$ são, respectivamente, a função de distribuição cumulativa normal padrão e a sua função inversa.

O índice de confiabilidade alvo β_T para os estados limites reversíveis (que é associado ao deslocamento de cargas permanentes e acidentais em edifícios) recomendados pelo código do modelo probabilístico - JCSS (2000) para 50 anos de vida útil é $\beta_T = 0$, ou seja,

para $\beta_T = 0$, $P_{fT} = 0,5$, o que corresponde a um índice de confiabilidade alvo anual de 2,3 e a uma probabilidade de falha, $P_{fT} = 1,38 \times 10^{-2}$.

O ISO 2394 (ISO 1998) recomenda um índice de confiabilidade alvo para os estados limites de serviço reversíveis $\beta_T = 0$, para um período de referência $T_n = 50$ anos, que corresponde a uma probabilidade de falha, $P_{fT} = 0.5$ e recomenda $\beta_T = 1,5$ para os estados limites de serviço irreversíveis. O Eurocode EN-1190 define índice de confiabilidade alvo para os estados limites de serviço reversível $\beta_T = 1,5$, para um período de referência $T_n = 50$ anos e $\beta_T = 2,9$, para um período de referência $T_n = 1$ ano.

6.6.1 Índices de confiabilidade relacionados à vida útil do projeto

Conforme Cheung (2007), para estimar-se a probabilidade aceitável de projeto de uma determinada estrutura é importante entender o conceito de vida útil. A vida útil T_d é admitida como o período no qual uma estrutura, ou parte dela, será utilizada com uma manutenção planejada, mas sem a necessidade de reparos.

A norma europeia EN 1990 (2002) indica valores de T_d para cinco categorias de estruturas conforme mostrado na Tabela 21. A NBR 6118 (2007), em seus comentários, prescreve que a vida útil pode ser entendida como o período de tempo durante o qual a estrutura é capaz de desempenhar bem as funções para as quais foi projetada.

Tabela 21 – Indicação de vida útil. (Fonte: CHEUNG, 2007).

Categoria	Vida útil de projeto T_d (anos)	Descrição das estruturas
1	10	Estruturas temporárias
2	10 a 25	Partes substituíveis
3	15 a 30	Estruturas agrícolas
4	50	Estruturas comuns
5	>100	Monumentos, pontes

Do mesmo texto, pode-se considerar que, por vida útil de projeto entende-se o período de tempo durante o qual se mantêm as características das estruturas de concreto sem exigir, em relação às prescrições de manutenção previstas, medidas extras de manutenção e reparo.

Um grande número de pesquisadores deste tema, entre eles, Vesikari (1988), Teplý (1993) e o RILEM (1996) sugerem que a estimativa da vida útil não pode ser realizada de uma forma puramente determinista.

Os critérios de carregamento para o estado limite último (ELU) são baseados em um período de referência de 50 anos. Segundo Galambos e Ellingwood (1986), não parece razoável fundamentar-se o critério de confiabilidade em serviço em um requisito tão rigoroso e, ao invés disso, os critérios para verificação de flechas devem ser baseados na premissa de que um deslocamento limite não deveria ser excedido mais de uma vez, em média, ao longo de um período de ocupação. Conforme Galambos e Ellingwood (1986), o período médio de ocupação para edifícios comerciais é de 8 anos,

Se o limite de deslocamento é reversível, ou seja, se não houver dano permanente após a remoção do carregamento, a verificação deverá ser feita de modo a garantir que o deslocamento limite não seja excedido anualmente.

Os carregamentos nominais das normas em geral são referentes a um período de referência de 50 anos. Conforme Rosowsky *et al.* (2000), desde que os deslocamentos totais ou de longa duração são, ao menos em parte, irreversíveis, é mais lógico que se use um período de referência de 50 anos ao invés de um período mais curto (como por exemplo, 1 ou 8 anos) como é comumente usado no cálculo de estados limites de serviço.

Conforme Stewart (2010) e Cheung (2007) a probabilidade alvo cumulativa em relação a um tempo t , $P_{IT}(t)$, dado que ela tenha sobrevivido t_n anos submetida a cargas de serviço, é dependente do tempo e deve ser relacionada a um período de referência T_n , o qual pode ser diferente da vida útil T_d .

Para estimar a probabilidade de projeto no ano n , Cheung (2007 *apud* Holicky *et al.*, 2005, p. 136) sugere a expressão aproximada:

$$P_{f,n}(t) = 1 - (1 - P_{f,0})^n \quad (165)$$

Esta fórmula é precisa quando as probabilidades de sobrevivência são consideradas independentes. Com $P_f = \Phi(-\beta)$, pode-se então obter os índices de confiabilidade no tempo de referência n , com a seguinte equação:

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_0)]^n \quad (166)$$

A Tabela 22 apresenta a comparação do índice de confiabilidade em função do tempo n , para a avaliação da confiabilidade para períodos de referência de 1, 5, 8, 25 e 50 anos.

Tabela 22 - Índice de confiabilidade para o período de referência T_n .

β_0	β_n				
	1	5	8	25	50
0	0				
0,5	0,5				
1,0	1,0				
1,3	1,3	0,3			
1,5	1,5	0,5	0,2		
1,7	1,7	0,8	0,5		
2,0	2,0	1,2	1,0	0,2	
2,3	2,3	1,6	1,4	0,7	0,2
2,5	2,5	1,9	1,7	1,1	0,6
2,7	2,7	2,0	1,9	1,4	1,0
3,0	3,0	2,5	2,3	1,8	1,5

6.7 Modelos probabilísticos das variáveis

Conforme Real e Campos (2001), sempre existe alguma incerteza sobre que valor as propriedades mecânicas dos materiais irão assumir na estrutura, e sobre quais serão as suas características geométricas finais, após a construção. Portanto, as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura são, na realidade, variáveis aleatórias. Estas variáveis possuem um determinado valor médio, certa variância e uma distribuição de probabilidade.

Para Merlin (2006), o sucesso da simulação de Monte Carlo depende significativamente da identificação dos parâmetros críticos do sistema que necessitam ser considerados como variáveis aleatórias e a determinação de suas propriedades estatísticas.

Assim como a precisão da análise estrutural depende de um modelo mecânico realista da estrutura, do mesmo modo a precisão da análise de confiabilidade depende fortemente do modelo probabilístico das variáveis utilizado para descrever as respectivas propriedades dos materiais e das cargas.

A variabilidade nas flechas de vigas de concreto armado pode ser atribuída a incertezas nas propriedades dos materiais componentes, nas dimensões e nas ações a que são submetidas ao longo do tempo. Segundo Real e Campos (2001) a variabilidade das propriedades do

concreto, dentre todos os parâmetros considerados, é o que mais afeta a distribuição dos deslocamentos de vigas submetidas a cargas de serviço.

Neste trabalho serão consideradas como variáveis aleatórias a resistência à compressão do concreto, a sua resistência à tração e o seu módulo de elasticidade longitudinal; a tensão de escoamento do aço à tração e à compressão, o módulo de elasticidade longitudinal do aço; as dimensões da seção transversal e o vão das vigas e lajes; o diâmetro das armaduras de flexão e a posição do centro de gravidade da armadura inferior; e ainda a umidade relativa do ambiente. Os carregamentos permanente e acidental também serão considerados como variáveis aleatórias.

Incertezas adicionais no cálculo das flechas são devidas aos erros do modelo, incluindo as condições de contorno, os efeitos das tensões residuais e incertezas no tempo em que são instalados elementos não estruturais.

Neste trabalho, admite-se que as variáveis aleatórias são independentes, com exceção dos seguintes parâmetros, módulo de elasticidade do concreto, e tensão de ruptura ou resistência à tração do concreto que serão correlacionados com a resistência à compressão. Esta correlação é obtida da seguinte maneira. Um valor da resistência à compressão do concreto é selecionado aleatoriamente a partir da distribuição de probabilidades. Este valor é então usado para calcular um valor médio da resistência à tração e do módulo de elasticidade. Os valores adotados dos coeficientes de variação (COV) destes parâmetros (E_c e f_{ctm}) são usados para estabelecer uma função de densidade de probabilidade. Um valor da resistência à tração e do módulo de elasticidade, correspondente ao valor da resistência à compressão selecionada, é obtido então aleatoriamente a partir destas distribuições.

6.7.1 Resistência do concreto à compressão

A NBR 12655 (1996) e o ACI 318 (2008) usam a distribuição Normal como modelo analítico para descrição da variabilidade da resistência à compressão do concreto; a maioria dos pesquisadores tem sugerido a distribuição Normal para a resistência do concreto à compressão, entretanto outros estudos apontam a distribuição Lognormal como um modelo mais adequado para descrição desta variabilidade (RIBEIRO, 2009).

Para uma determinada resistência característica, conhecida a média, o desvio padrão correspondente pode ser obtido caso o coeficiente de variação seja conhecido. Segundo Mirza e MacGregor (1979), o coeficiente de variação pode ser tomado como praticamente

constante para valores de resistência à compressão do concreto abaixo de 28 MPa, assumindo valores de 0,10, 0,15 e 0,20 para classes de controle de qualidade excelente, médio e baixo, respectivamente.

Bazante Baweja (1995) sugerem considerar a variabilidade estatística da resistência do concreto com um coeficiente de variação de 0,15, já nos trabalhos de Bazante Liu (1985) e Kristeke Bazant (1985) o coeficiente de variação utilizado foi de 0,10. Segundo Merlin (2006), a variabilidade estatística da resistência do concreto depende do nível de controle utilizado na confecção do concreto.

A NBR 12655 (1996) prescreve, em seu item 6.4.3.1, que o cálculo da resistência de dosagem do concreto depende, entre outras variáveis, da condição de preparo do concreto, definidas em três condições:

- Condição A: aplicável às classes C10 até C80.
- Condição B: aplicável às classes C10 até C25.
- Condição C: aplicável apenas aos concretos de classe C10 e C15.

Como o item 7.1 da NBR 6118 (2007) só permite concretos para fins estruturais com resistência superior a 20 MPa, com o objetivo de garantir a durabilidade para as diversas classes de agressividade estabelecidas por esta norma, às classes de concreto a serem utilizadas neste estudo estão inseridas somente nas condições A e B do item 6.4.3.1 da NBR 12655 (1996).

Para as condições A e B a NBR 12655 (1996) apresenta uma tabela para os valores de desvio padrão a serem adotados em função destas condições de preparo.

Tabela 23 - Desvio-padrão a ser adotado em função da condição de preparo do concreto

Condição	Desvio - padrão
A	4,0
B	5,5
C	7,0

O valor da resistência média do concreto à compressão f_{cm} pode ser calculado de acordo com o item 6.4.3 da NBR 12655 (1996), segundo a equação:

$$f_{cd} = f_{ck} + 1,65 S_d \quad (167)$$

onde:

f_{cj} é a resistência média do concreto à compressão, prevista para a idade de j dias, em MPa;

f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão, em MPa;

S_d é o desvio-padrão da dosagem, em MPa.

Portanto a variabilidade da resistência dos corpos de prova cilíndricos de concreto pode ser calculada pela razão entre o desvio padrão (S_d) e a resistência média (f_{c28}).

Tabela 24 – Valores de V_{cil} para concretos de classe C20, C25 e C30.

S_d	C20		C25		C30	
	f_{c28}	V_{cil}	f_{c28}	V_{cil}	f_{c28}	V_{cil}
4,0	26,6	0,15	31,6	0,13	36,6	0,11
5,5	29,1	0,19	34,1	0,16	39,1	0,14

1. Valores de f_{c28} e S_d em MPa.
2. V_{cil} é a variabilidade ou coeficiente de variação do corpo de prova cilíndrico

O correspondente valor do coeficiente de variação do concreto (V_c) sob compressão, conforme Choi *et al.* (2010), é dado por:

$$V_c^2 = V_{cil}^2 + 0.0084 \quad (168)$$

onde V_{cil} é o coeficiente de variação dos corpos de prova cilíndricos.

Tabela 25 - Valores de V_c para concretos de classe C20, C25 e C30.

S_d	C20		C25		C30	
	f_{c28}	V_c	f_{c28}	V_c	f_{c28}	V_c
4,0	26,6	0,176	31,6	0,159	36,6	0,143
5,5	29,1	0,211	34,1	0,184	39,1	0,167

1. Valores de f_{c28} e S_d em MPa.
2. V_c é a variabilidade ou coeficiente de variação do concreto à compressão

6.7.2 Resistência à tração

Conforme o JCSS (2000), a propriedade de referência do concreto é a resistência à compressão (f_{c28}) de corpos de prova ensaiados de acordo com condições padronizadas e na idade de 28 dias. A resistência à tração do concreto é relacionada com esta referência de

resistência, também apresentada pela NBR 6118 (2007), de acordo com a equação:

$$f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (169)$$

Conforme Real e Campos (2000) o coeficiente de variação da resistência à tração do concreto pode ser adotado como igual a 1,20 vezes o valor atribuído para a resistência à compressão do concreto, para incluir a maior variabilidade da resistência à tração do concreto.

O CEB-FIP Model Code 90 (1993) afirma que a resistência à tração do concreto é mais variável do que a sua resistência à compressão, devido a maior influência da forma e da textura da superfície dos agregados e que é afetada significativamente pelos efeitos do ambiente.

Baseado em análises estatísticas com testes de corpos de prova cilíndricos de concreto, ensaiados por Mirza *et al.* (1979), o coeficiente de variação do concreto à tração pode ser calculado por:

$$V_r^2 = \frac{V_{cil}^2}{4} + 0.0421 \geq V_c^2 \quad (170)$$

Tabela 26 – Valores de V_r para concretos de classe C20, C25 e C30.

S_d	C20		C25		C30	
	$f_{ct,m}$	V_r	$f_{ct,m}$	V_r	$f_{ct,m}$	V_r
4,0	2,21	0,218	2,56	0,215	2,90	0,212
5,5	2,21	0,226	2,56	0,220	2,90	0,217

1) Valores de f_{c28} e S_d em MPa.

2) V_r é a variabilidade ou coeficiente de variação do concreto à tração

A maioria dos pesquisadores tem sugerido a distribuição normal também para a resistência do concreto à tração.

Neste trabalho a resistência à tração do concreto é correlacionada com a resistência à compressão. Esta correlação é obtida da seguinte maneira:

- 1) Um valor é selecionado aleatoriamente a partir da distribuição de probabilidade da amostra da resistência à compressão do concreto.
- 2) Este valor é então usado para calcular um valor médio da resistência à tração por meio da eq.(169).

- 3) O valor adotado do coeficiente de variação (COV) deste parâmetro (Tabela 26) é usado para estabelecer uma função de densidade de probabilidade.
- 4) Um valor da resistência à tração é obtido então aleatoriamente a partir desta distribuição.

A Figura 53 apresenta o resultado de uma amostra de resistência à tração do concreto, com 1000 valores obtida pelo procedimento descrito acima para um concreto com f_{ck} igual a 25 MPa e um desvio padrão de 5 MPa. O valor médio da resistência à compressão aos 28 dias (f_{c28}) desta amostra é igual a 33,25 MPa.

A amostra foi gerada a partir de um concreto com resistência à tração média igual a 2,56 MPa e um coeficiente de variação (COV) igual a 0,217. Nesta figura também é apresentado o gráfico da eq.(169) da NBR 6118 (2007) para a determinação da resistência à tração média.

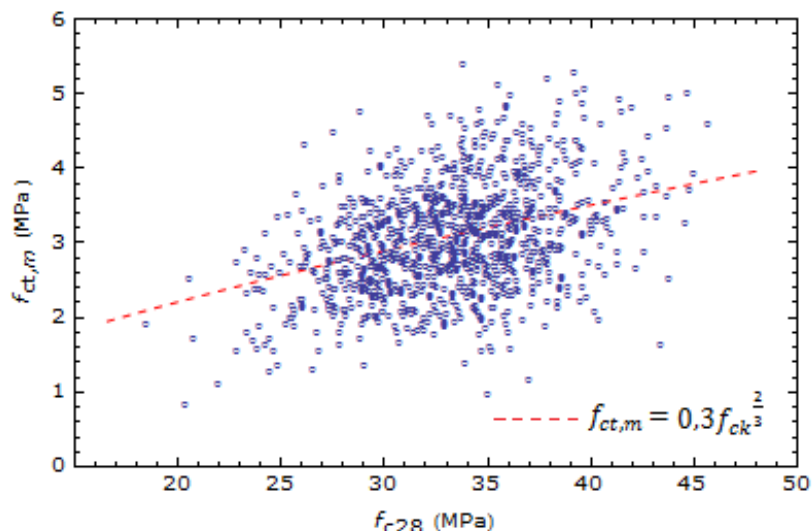


Figura 53 – Correlação entre a resistência à tração média do concreto e a resistência à compressão f_{ck} .

6.7.3 Módulo de elasticidade do concreto

O módulo de elasticidade inicial do concreto será calculado com a relação da NBR 6118 (2007) dada pela eq.(1).

O valor do coeficiente de variação do módulo de elasticidade inicial do concreto, conforme Choi *et al.* (2010), é dado por:

$$V_{ec}^2 = \frac{V_{cil}^2}{4} + 0.0084 \quad (171)$$

Tabela 27 - Valores de V_{ec} para concretos de classe C20, C25 e C30.

Sd	C20		C25		C30	
	E_{ci}	V_{ec}	E_{ci}	V_{ec}	E_{ci}	V_{ec}
4,0	25044	0,118	28000	0,112	30672	0,107
5,5	25044	0,132	28000	0,121	30672	0,115

- 1) Valores de f_{c28} e S_d em MPa.
- 2) V_c variabilidade ou coeficiente de variação do módulo de elasticidade do concreto.

Neste trabalho o módulo de elasticidade inicial do concreto é correlacionado com a resistência à compressão com o mesmo procedimento adotado para a resistência à tração.

A Figura 54 apresenta o resultado de uma amostra do módulo de elasticidade inicial do concreto, com 1000 valores, para um concreto com f_{ck} igual a 25 MPa e um desvio padrão de 5 MPa.

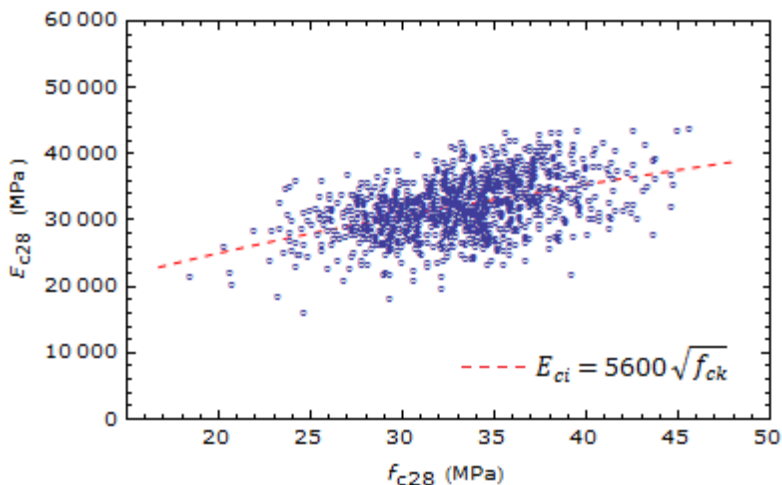


Figura 54 – Correlação entre o módulo de elasticidade do concreto e a resistência à compressão f_{ck} .

. O valor médio da resistência à compressão desta amostra aos 28 dias (f_{c28}) é igual a 33,25 MPa.

A amostra foi gerada a partir de um concreto com módulo de elasticidade inicial igual a 28000 MPa, obtida com a eq.(1) e um coeficiente de variação (COV) igual a 0,12. Nesta figura também é apresentado o gráfico da eq.(1) da NBR 6118 (2007) para a determinação do módulo de elasticidade inicial.

A Figura 55 apresenta os resultados das amostras geradas para o módulo de elasticidade inicial de algumas classes de concreto, C20, C25, C30 e C35.

As amostras possuem 1000 valores e os respectivos histogramas foram colocados ao lado de cada amostra. O gráfico da eq.(1) da NBR 6118 (2007) também foi incluído nesta figura.

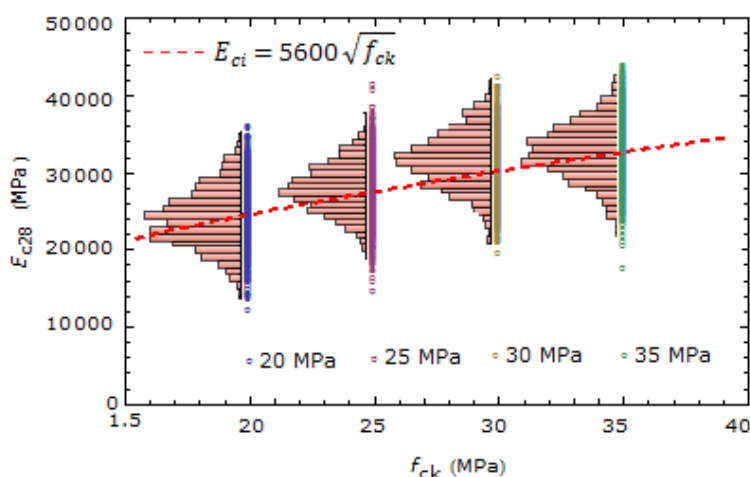


Figura 55 – Distribuições de módulo de elasticidade do concreto calculadas em função da resistência à compressão f_{ck} .

6.7.4 Propriedades do aço e das armaduras

O aço das armaduras é geralmente classificado e produzido de acordo com categorias. A propriedade básica destes aços é a resistência ao escoamento, f_y , definida para uma deformação específica de 0,2 %. A variabilidade da resistência ao escoamento em uma mesma barra de aço é muito pequena e o coeficiente de variação é de 1 a 4% para barras que se originam do mesmo fabricante, (MELCHER, 2001, MIRZA e MacGREGOR, 1979).

Conforme Choi *et al.* (2010) o módulo de elasticidade do aço tem uma pequena dispersão o valor médio pode ser adotado igual ao valor nominal e o coeficiente de variação igual a 2,4 %.

Os valores médios das áreas das armaduras e a resistência do aço são afetados de um fator de *viés* para levar em consideração o erro sistemático ou tendenciosidade no processo de fabricação.

Tabela 28 – Propriedades estatísticas do aço e das armaduras

Propriedade	Valor médio	COV	Distribuição
f_y	$1,09 f_{yk}$	0,04	Normal
E_s	21000	0,024	Normal
A_s	$0,99 A_{sn}$	0,024	Normal truncada

1) f_y e E_s em MPa ; A_s e A_{sn} (área nominal) em cm^2

6.7.5 Propriedades geométricas das vigas e lajes

As propriedades geométricas nas peças de concreto armado são geralmente variáveis aleatórias. Imperfeições geométricas surgem inevitavelmente durante as fases da construção e acarretam variações nas dimensões da seção transversal, no comprimento, no cobrimento de concreto e consequentemente na posição do centro de gravidade das armaduras e da altura útil dos elementos de concreto. Em comparação com as ações e as propriedades materiais a variabilidade destas propriedades pode ser considerada pequena. Estas variações dependem de muitos fatores, como por exemplo, do tamanho, da forma, do travamento e da qualidade das fôrmas usadas, além dos procedimentos de concretagem e da vibração do concreto.

Por estas razões, as imperfeições geométricas dependem fundamentalmente da qualidade, das técnicas de construção, dos equipamentos e do treinamento do pessoal onde se localiza a construção, (MIRZA e MacGREGOR, 1979).

De acordo com o BASIS OF STRUCTURAL DESIGN (2004), a dimensão nominal (referência) a_{nom} é a dimensão básica que é utilizada nos desenhos e na documentação de projeto, e em relação a qual todos os desvios são referenciados. O desvio sistemático ou fator de *viés* (erro sistemático ou tendenciosidade) δa_{sis} é uma quantidade que representa os desvios dimensionais. Na Figura 56, o desvio limite Δa é associado com uma probabilidade 0,05, que é a probabilidade geralmente usada para caracterizar a resistência característica. Neste caso o desvio limite é dado por $\Delta a = 1,64\sigma_a$. Em casos especiais, entretanto, outras probabilidades podem ser usados e ao invés do coeficiente 1,64 outros valores deverão ser usados. Geralmente um quantil a_p da dimensão a correspondente a uma probabilidade p pode ser expressa por

$$a_p = a_{nom} + \delta a_{sis} + k_p \sigma_a \quad (172)$$

onde o coeficiente k_p depende da probabilidade p e no tipo de distribuição de probabilidade adotado (JCSS, 2000).

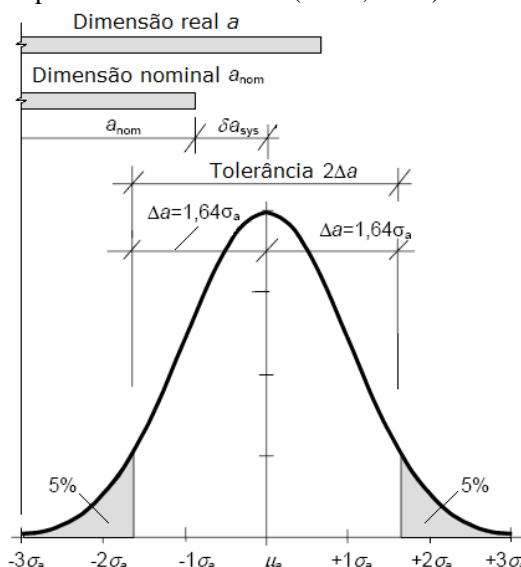


Figura 56 – Características da dimensão a . Fonte: Adaptado de BASIS OF STRUCTURAL DESIGN (2004).

O JCSS (2000) apresenta valores médios e desvios padrões para os desvios de construção nas dimensões das seções transversais de elementos de concreto moldados “*in loco*” e os seus valores nominais e informa que se pode adotar uma distribuição Gaussiana (Normal) para estas dimensões. Choi *et al.* (2010) também adotam uma distribuição Normal para estas variáveis.

Dados estatísticos também permitem estabelecer valores para a posição do centro de gravidade da armadura (d'), (STEWART,1996). Os valores médios das dimensões são obtidos a partir dos valores nominais de projeto e com a consideração dos fatores de erro sistemáticos (fator de *viés*) acrescidos ao valor nominal.

De acordo com o JCSS-Part III (2000), o valor médio do cobrimento de concreto da armadura superior de vigas e lajes é sistematicamente maior do que o valor nominal em cerca de 10 mm, o valor do desvio padrão também é no entorno de 10 mm (dentro de um intervalo de 5 a 15 mm).

Ainda de acordo com JCSS-Part III (2000), significativamente mais variável são os dados obtidos para o cobrimento da armadura inferior. Dependendo do tipo dos espaçadores, os dados indicam que o valor médio do cobrimento de concreto da armadura inferior de vigas e lajes é sistematicamente maior do que o valor nominal, dentro de uma faixa de -20 mm a +20 mm, enquanto o desvio padrão é relativamente menor, no entorno de 5 mm.

Tabela 29 - Propriedades das dimensões das vigas

Propriedade	Valor médio ¹	COV	Distribuição
b	$b_{nom} + 0,4$	0,045	Normal
h	$h_{nom} + 0,16$	0,045	Normal
L	$L_{nom} + 0,4$	0.002	Normal
d'	$d'_{nom} + 0,16$	0,045	Normal
d''	$d''_{nom} + 0,2$	0.045	Normal

1) Valor nominal + fator de *viés* (em cm).

6.7.6 Umidade relativa do ambiente

A umidade relativa do ambiente é um parâmetro que não varia somente aleatoriamente, mas segue uma flutuação sazonal e diária. É praticamente impossível considerar essa flutuação na análise estrutural, sendo suficiente considerar a umidade relativa e a temperatura com seus valores médios e atribuir os fatores de incerteza a esse valor.

Segundo Braga e Amorin (2004), a umidade média anual no Distrito Federal é de 67%. Goulart (1993) obteve para um período de 10 anos uma média de 82,7 %, um desvio padrão de 12,5 % e um coeficiente de variação de 15,25 % para a umidade relativa do ar na cidade de Florianópolis. Ver Anexo D - Umidade relativa do ambiente no Brasil, para dados sobre a umidade relativa do ambiente no Brasil.

6.7.7 Modelo probabilístico dos carregamentos

De acordo com a NBR 6118 (2007), as ações se classificam em permanentes, variáveis e excepcionais. Ações permanentes são as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção.

As ações permanentes diretas são constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelos pesos dos elementos construtivos fixos e das instalações permanentes. De acordo com o JCSS (2000), a variação

destas ações permanentes em torno da sua média, ao longo do tempo, é pequena e lenta.

As ações variáveis diretas são constituídas pelas cargas acidentais previstas para o uso da edificação. Segundo o JCSS (2000), a variação destas ações no tempo é frequente e significativa.

As ações excepcionais são de duração extremamente curta e com baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da edificação.

De acordo com as normas de projeto, as flechas das vigas devem ser calculadas para as combinações quase permanentes de carregamento, incluindo-se os efeitos da fissuração e das deformações diferidas do concreto. As combinações de serviço frequentes são necessárias na verificação dos estados limites de formação de fissuras, de abertura de fissuras e de vibrações excessivas e podem também ser consideradas para a verificação de estados limites de deformações excessivas decorrentes de vento ou temperatura que podem comprometer as vedações.

As combinações quase permanentes são combinações de ações que podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade deste período.

Em cada combinação, as ações permanentes são consideradas com os seus valores integrais e as ações variáveis são consideradas com os seus valores reduzidos por meio de um coeficiente $\psi_2 < 1$, estabelecidos na NBR-8681.

No caso particular dos edifícios, as cargas de serviço na combinação quase permanente podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura (pelo menos metade da vida da construção). Nas combinações quase permanentes de serviço, portanto, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\Psi_2.F_{qk}$.

Os valores característicos das ações variáveis, F_{qk} , indicados na NBR 6118 (2007), correspondem a valores que têm de 25% a 35% de probabilidade de serem ultrapassados no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos, o que significa que o valor característico F_{qk} é o valor com período médio de retorno de 200 anos a 140 anos respectivamente.

A partir de bancos de dados de levantamentos de cargas acidentais medidas diretamente nas estruturas é possível produzir histogramas que apresentam a ocorrência relativa de diversos níveis de carregamento equivalentes. Para diferentes áreas de pisos medidas, as distribuições de densidade de probabilidade obtidas para o modelo de

cargas se modificam. Isto é mostrado na Figura 57 para pisos com incrementos de área.

Como pode ser observado nesta figura, as distribuições de probabilidade destes resultados variam de funções altamente assimétricas para aproximadamente normais, à medida que a área de contribuição do piso aumenta.

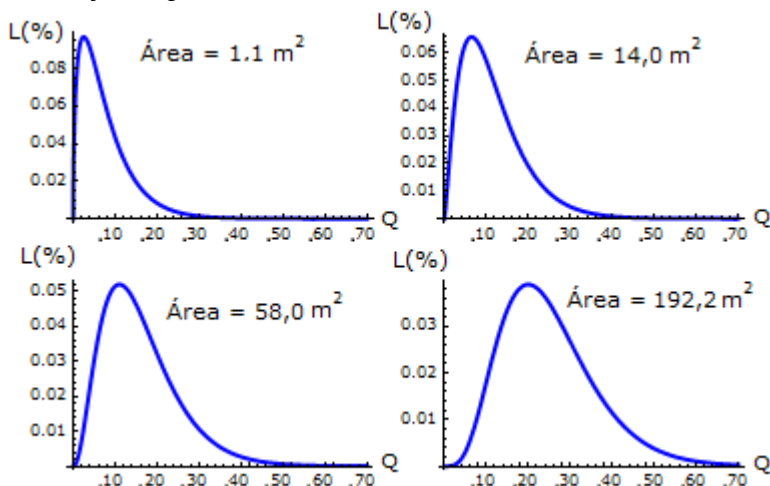


Figura 57 – Distribuições de probabilidade de cargas acidentais em pisos de edifícios. (Adaptado de Melcher (2001)).

Conforme Melcher (2001), as cargas acidentais em pisos de edifícios devem ser modeladas, visto que registros de longa duração não estão disponíveis, e existem muitos possíveis parâmetros que podem influenciar nestes carregamentos.

A Figura 58 apresenta um exemplo típico de história de carregamento de cargas acidentais quase permanentes em um piso de edifício comercial. Mudanças na ocupação produzem alterações na carga acidental quase permanente.

Melcher (2001) indica uma distribuição Gamma como o modelo mais apropriado para estas cargas acidentais. A função Gamma é dada:

$$f_L(x) = \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (173)$$

Os parâmetros λ e α podem ser obtidos a partir da média e da variância da carga (ver Anexo A).

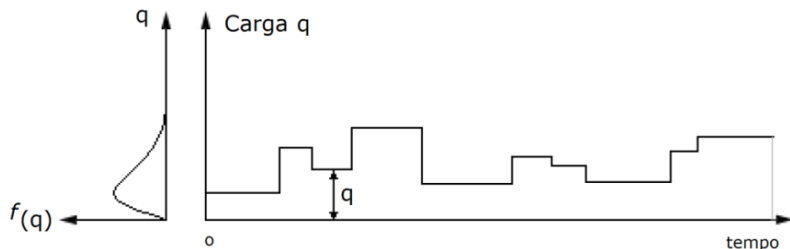


Figura 58 – História de carregamento de cargas acidentais quase permanentes (sustentadas).

Conforme Nowak e Collins (2000) existe uma tendência por parte dos engenheiros de projeto em subestimar o peso próprio das estruturas e das cargas permanentes dos revestimentos e dos elementos de fechamento, tais como paredes e divisórias.

Portanto, para levar este efeito em consideração, deve-se usar um fator de *viés* (erro sistemático ou tendenciosidade) de 1,05 sobre o valor nominal para obter o valor médio.

A Tabela 30 apresenta os modelos probabilísticos adotados neste trabalho para as cargas permanentes e acidentais quase permanentes.

Tabela 30 – Modelo estatístico do carregamento

Carga	Duração	Valor médio	COV	Distribuição
Cargas permanentes ¹	50 anos	$1,05 G_{nom}$	0,1	Normal
Carga acidental ²	8 anos	$0,3 Q_{nom}$	0,6	Gamma

1) G_{nom} carga permanente.

2) Q_{nom} carga acidental quase permanente (carga sustentada).

6.7.8 Resumo dos parâmetros estáticos das variáveis aleatórias

Os modelos estatísticos e os parâmetros das variáveis aleatórias adotadas neste estudo estão resumidos na Tabela 31.

Conforme já mostrado, os valores médios das áreas das armaduras, da resistência do aço, as dimensões das vigas e as cargas permanentes são afetados de um fator de *viés* para levar em consideração os erros sistemáticos nos processos de fabricação e execução.

Tabela 31 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias

Variável		Média μ	C.O.V.	Distribuição
Concreto	f_{cm}^1	$f_{ck} + 1,65 S_d$	0.176	Normal
Concreto	f_{ctm}	$0,3f_{ck}^{\frac{2}{3}}$	0.218	Normal
Concreto	E_{ci}	$5600 \sqrt{f_{ck}}$	0.119	Normal
Aço	f_y	$1,09 f_y$	0.04	Normal
Aço	E_s	21000	0.024	Normal
Armadura	$A_{s_{inf}}$	$0.99 A_{s_{inf,nom}}$	0,024	Normal
Armadura	$A_{s_{sup}}$	$0.99 A_{s_{sup,nom}}$	0.024	Normal
CG da armadura	d'	$d'_n + 0,16$	0.045	Normal
Largura da viga	b	$b_n + 0,4$	0.045	Normal
Altura da viga	h	$h_n + 0,16$	0.045	Normal
Vão da viga	L	$L_n + 0,4$	0.002	Normal
Umidade relativa	U	U_r	0,15	Normal
Carga permanente	G	$1,05 G_{nom}$	0,1	Normal
Carga acidental	Q	$\Psi_2 Q_{nom}$	0,6	Gamma

- 1) Obtido a partir das propriedades do concreto aos 28 dias de idade em MPa.
- 2) CG = Centro de gravidade em relação à face inferior da viga
- 3) Dimensões em cm.

6.8 Simulação de Monte Carlo

Para desenvolver a análise de confiabilidade e a variabilidade de flechas de vigas de concreto armado, é necessário gerar funções de densidade de probabilidade ou histogramas destas flechas para uma dada situação de projeto. As flechas deverão ser os valores totais diferidos, valores incrementais devido à execução de elementos não estruturais, ou valores máximos instantâneos devido a cargas acidentais durante a vida útil da estrutura.

Para determinar estas funções de densidade ou histogramas, serão usadas simulações feitas com o Método de Monte Carlo e o modelo mecânico implementado para o cálculo dos valores determinísticos das flechas. Métodos numéricos conhecidos como métodos de Monte Carlo podem ser descritos como métodos de simulação estatística, onde simulação estatística é definida em termos gerais como sendo qualquer método que utiliza números aleatórios para realizar simulações. Os métodos de simulação estatística contrastam com os métodos de

simulação com discretização convencionais, os quais tipicamente utilizam equações diferenciais parciais ou ordinárias que descrevem algum sistema físico ou matemático.

Em muitas aplicações do método de Monte Carlo, o processo físico é simulado diretamente, e não é necessário nem mesmo escrever as equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema. A única exigência é que o sistema físico ou matemático seja descrito por funções de densidade de probabilidade (PDF). Uma vez que estas funções de densidade de probabilidade sejam conhecidas, a simulação de Monte Carlo pode ser processada por meio de amostras aleatórias obtidas destas funções.

O método de Monte Carlo surgiu, oficialmente, no ano de 1949, com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam. Este método de cálculo de probabilidade, que se baseia em simulações aleatórias, é um dos mais antigos do gênero, sendo de fácil compreensão física e amplamente utilizado em engenharia. Este método apresenta boa precisão e é de fácil implementação computacional.

Como o próprio nome indica, o método de simulação de Monte Carlo envolve a geração de um grande número de valores aleatório para cada variável aleatória. Com estes valores, a função de comportamento é avaliada e assim observados seus resultados.

No caso da análise da confiabilidade de estruturas, isto quer dizer que cada variável aleatoriamente gerada vai formar um vetor $u_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de variáveis aleatórias.

A função de comportamento é então avaliada $G(u_i)$, se ela for violada (i.e. $G(u_i) \leq 0$), a estrutura ou o elemento não satisfaz às condições mínimas exigidas. Assim o experimento é repetido muitas vezes e em cada vez um novo vetor $u_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é gerado. Finalmente, se um número N de experimentos é feito, a probabilidade de falha é dada aproximadamente por:

$$P_f \approx \frac{n(G(u_i) \leq 0)}{N} \quad (174)$$

Onde $n(G(u_i) \leq 0)$ é o número de vezes que a função de comportamento teve valores $G(u_i) \leq 0$ e N é o número de avaliações da função de comportamento necessárias para a precisão desejada.

O método de Monte Carlo é um dos métodos de simulação mais utilizados quando se deseja obter uma estimativa precisa da probabilidade de falha. Para sua utilização, é necessário que as variáveis aleatórias tenham distribuição de probabilidades conhecida.

Em resumo, o método está baseado no processo de inúmeras repetições, onde em cada uma delas é gerado um conjunto de valores aleatórios para as variáveis obtidos mediante suas respectivas distribuições de probabilidades. Muitas simulações são então feitas (múltiplas tentativas ou realizações) e o resultado desejado é obtido com uma média sobre o número de observações. Cada repetição resulta em uma chamada do modelo mecânico fornecendo, assim, uma solução para a estrutura. Dessa forma, ao final do processo de simulação é obtido um conjunto de respostas mecânicas da estrutura que devem ser comparadas com a função de estado limite.

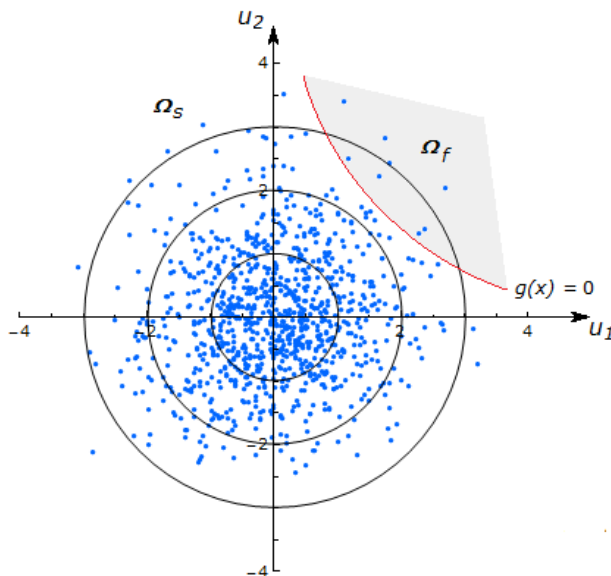


Figura 59 - Simulação pelo método de Monte Carlo.

Graficamente é fácil visualizar o método de Monte Carlo, como mostra a Figura 59. Cada simulação produz uma resposta do modelo mecânico, no caso um valor de deslocamento ou flecha máxima, que se encontra no domínio de segurança (Ω_s) ou no domínio de falha (Ω_f). Assim, a probabilidade de falha é obtida somando-se os eventos de falha e relacionando-os com todos os eventos possíveis.

Em muitas aplicações práticas, pode-se prever a variância, ou erro estatístico deste resultado esperado, e, portanto uma estimativa do número de simulações, que são necessárias para se atingir a precisão desejada.

6.8.1 Integração pelo método de Monte Carlo

O teorema básico da integração pelo método de Monte Carlo estima a integral de uma função f sobre um domínio de volume multidimensional V como sendo:

$$\int_V f \, dV \approx V \langle f \rangle \pm \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (175)$$

onde, a notação $\langle \rangle$ significa calcular a média aritmética sobre os N pontos da amostra;

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad e \quad \langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^2(x_i) \quad (176)$$

O termo \pm na eq.(175) é um desvio padrão do erro estimado para a integral, não um indicador rigoroso do erro provável, além disso, não há nenhuma garantia que o erro esteja seguindo uma distribuição normal Gaussiana.

A integral definida de uma função $g(u) > 0$ de a até b :

$$I = \int_a^b g(u) \, du \quad (177)$$

é a área limitada pela curva $g(u)$ dentro do intervalo $[a, b]$, como mostrado na Figura 60.

O retângulo de área A envolve esta área. Após a geração de um número N de valores aleatórios para a variável u dentro do intervalo $[a, b]$, utiliza-se a função indicadora:

$$I[g(u)] = 1 \quad (178)$$

para selecionar os pontos na área do retângulo A , e a função indicadora:

$$I[g(u)] = 1 \quad (179)$$

para selecionar aqueles fora da área do retângulo A .

A integral pode ser estimada como a área A multiplicada pela fração $\frac{n}{N}$ de pontos que pertencem à área A , onde n é o número de pontos para o qual a função indicadora $I[g(u)]$ é igual a 1 e N é o número total de pontos da amostra, ou seja, é a probabilidade de incidência dos pontos dentro da área A .

$$I = \int_a^b g(u) \, du \approx c(b-a) \frac{n}{N} \quad (180)$$

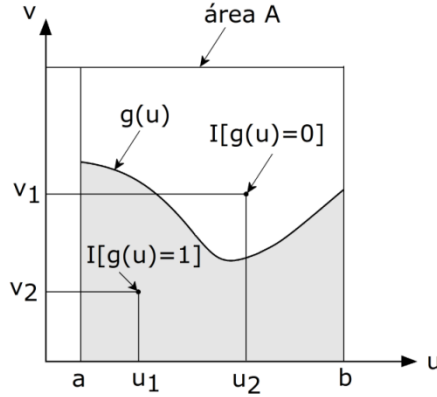


Figura 60 - Integração numérica pelo método de Monte Carlo. Fonte: Adaptado de Kottegoda e Rosso (1998).

6.8.2 Simulação pelo método de Monte Carlo

A determinação da confiabilidade ou da probabilidade de falha de uma estrutura pode ser colocada na forma de uma integral multidimensional e integrada pelo Método de Monte Carlo:

$$P_f = P(G[R, S] \leq 0) \int_{D_f} f_Z(z) dz \quad (181)$$

onde:

$f_Z(z)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta.

D_f é o domínio de falha.

Usando uma função indicadora, como já mostrado, pode-se integrar eq.(181) sobre todo o domínio:

$$P_f = P(G[R, S] \leq 0) \int_{D_f} I_{[g(z)]} f_Z(z) dz \quad (182)$$

onde:

$$I_{[g(z)]} = 1 \text{ se } g(z) \leq 0 \text{ (falha da estrutura)} \quad (183)$$

$$I_{[g(z)]} = 0 \text{ se } g(z) > 0 \text{ (não - falha da estrutura)} \quad (184)$$

A expressão do valor esperado de uma função qualquer de variáveis aleatórias $g(z)$ é:

$$E_{f[g(z)]} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f_Z(z) dz \quad (185)$$

e pode ser estimada, com base em uma amostra de tamanho finito:

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{si}} g(z_i)}{n_{si}} \quad (186)$$

Comparando estas duas expressões com a eq. (182) obtém-se:

$$\bar{P}_f = \frac{\sum_{i=1}^{n_{si}} g(z_i)}{n_{si}} \quad (187)$$

A simulação de Monte Carlo consiste em:

- 1) gerar n_{si} valores de uma amostra de $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ a partir de $f_Z(z)$;
- 2) verificar a ocorrência de falha ou não para cada amostra por meio de $I[g(z_i)]$;
- 3) estimar a probabilidade de falha por meio da eq.(181).

A variância de P_f pode ser estimada por meio de:

$$Var_{(P_f)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{si}} (I[g(z_i)] - P_f)^2}{n_{si}(n_{si} - 1)} \quad (188)$$

A variância de P_f corresponde à incerteza relacionada com a simulação realizada. A equação mostra que o erro da simulação diminui quando aumenta o número de simulações e que este erro depende do valor da probabilidade de falha. Quanto menor a probabilidade de falha, maior o número de simulações necessária para se obter a mesma variância.

Uma primeira estimativa do número de simulações para um dado nível de confiança na probabilidade de falha pode ser obtido por (BRODING *et al* 1964 apud. MELCHER, 2002):

$$N \geq \frac{\ln(1 - C)}{P_f} \quad (189)$$

Portanto, para um nível de confiança de 95% e uma probabilidade de falha de $P_f = 10^{-3}$, a quantidade de simulações necessárias é maior que 3000.

Uma ferramenta usual para verificar a precisão do método de Monte Carlo, é o gráfico de resultados relacionando a probabilidades de falha P_f para uma sucessão de resultados de realizações de simulações com diversos tamanhos de amostras. Um exemplo deste tipo de gráfico é mostrado na Figura 61, para simulações de falha em serviço por deformação excessiva.

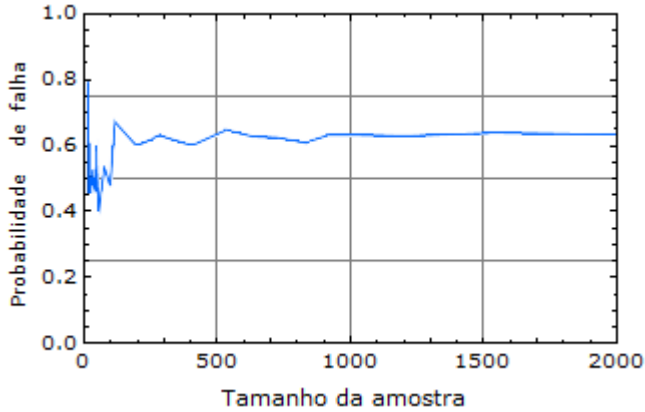


Figura 61 - Resultados de probabilidade de falha em função do tamanho da amostras das simulações.

Para reduzir o tamanho das amostras em uma simulação pode-se empregar técnicas de amostragem por importância. Estas técnicas procuram reduzir o número de simulações evitando a simulação excessiva de pontos longe da região de interesse que é o domínio de falha. Os pontos de amostragem são deslocados para o domínio de falha com a função de amostragem $h_z(z)$.

$$P_f = \int_z I[g(z_i)] \frac{f_z(z)}{h_z(z)} dz \quad (190)$$

Como $h_z(z)$ passa a ser a nova função de amostragem $\bar{I}[g(z)] \neq I[g(z)]$, a P_f passa a ser estimada por:

$$P_f = \frac{1}{nsi} \sum_{i=1}^{nsi} \int_z \bar{I}[g(z_i)] \frac{f_z(z)}{h_z(z)} dz \quad (191)$$

6.8.3 Geração de amostras de variáveis aleatórias

Um dos aspectos mais importantes na aplicação do método de Monte Carlo é a geração de números aleatórios. Diversos métodos podem ser utilizados para gerar números aleatórios, divididos entre métodos analógicos e digitais. Nas simulações feitas em computador a geração mais apropriada é a digital, feita com geradores numéricos. Bratley *et al* (1987) e o livro Numerical Recipes (1992) apresentam os geradores mais comumente usados nas simulações de Monte Carlo.

Na realidade, números aleatórios gerados por programas de computador não são verdadeiramente aleatórios porque esses geradores são baseados em cálculos recursivos, para um dado gerador e um valor

inicial, denominado semente, a sequência gerada será sempre a mesma e se repete após uma quantidade de valores (período da sequência). É extremamente importante utilizar um gerador que tenha um período de recorrência o maior possível. O procedimento básico adotado, por conveniência, produz números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. A qualidade da amostra gerada deve ser testada e para isso diversos critérios de verificação podem ser usados.

6.8.4 Geração de números aleatórios com distribuição uniforme

A geração de números aleatórios *puros* é a base para todos os processos de simulação. O termo puro é reservado para simulações de uma distribuição uniforme (discreta ou contínua).

Muitos métodos para a simulação de números aleatórios segundo uma distribuição particular baseiam-se na geração de números aleatórios puros, ou, de simulações de uma distribuição uniforme. Há vários métodos para a geração de números aleatórios uniformes, a maioria deles baseado nos algoritmos congruenciais lineares, cuja equação básica é:

$$x_i = (a x_{i-1} + b) \bmod m \quad (192)$$

A escolha dos valores de a , b e m , assim como do valor inicial ou semente, é crucial para o bom desempenho do gerador, que consiste em gerar listas de valores as mais longas possíveis, que passem nos testes de aleatoriedade. Estudos complexos envolvendo teorias dos números embasam essas escolhas. Por exemplo, muitos pacotes programam os seguintes valores: $b = 0$; $m = 2^{31} - 1$ e $a = 1.343.714.438$, cujo período é $2^{31} - 2$.

O gerador linear congruencial (LCG) foi proposto por Lehmer (1949). Este gerador de números pseudoaleatórios é obtido a partir do seguinte processo recursivo:

$$u_{n+1} = a u_n + b \bmod m \quad (193)$$

onde m é um número primo ou uma potência de um número primo, o multiplicador a é um elemento multiplicador de ordem elevada, e a semente x_0 é um c-primo de m .

$$LGC(m, a, b, x_0), a, b, u_n \in \mathbb{Z}_m$$

Lehmer (1949) propôs o gerador:

$$LGC(10^8 + 1, 23, 0, 47\,594\,118)$$

A sequência de números gerados pelas equações (192) e (193) é determinística e previsível; portanto é pseudoaleatória. O fato da sequência de números pseudoaleatórios poder ser reproduzida com o uso

de uma mesma semente x_0 é conveniente, quando for necessário comparar ou reproduzir resultados.

O gerador de números aleatórios adotado neste trabalho será a própria função *Random* do *Mathematica* (WOLFRAM, 2003). O *Mathematica* usa a função *CellularAutomaton*, com a regra 30, para gerar uma sequência de números aleatórios (pseudoaleatórios) uniformemente distribuídos. Este gerador é não linear e estudos empíricos sugerem que o período de repetição é da ordem de $20,63n$, onde n é o número de células. A sequência aleatória é obtida a partir da sequência de bits (0 e 1) da coluna central do *cellular automaton*.

O estado do *cellular automaton* em cada passo é representado por uma lista tal como {0, 0, 1, 0, 0}, onde 0 corresponde a uma célula branca e 1 a uma célula preta. Uma condição inicial consistindo de n células brancas com uma célula preta no meio é obtida com a seguinte função do *Mathematica*:

```
CenterList[n_Integer]:= ReplacePart[Table[0,{n}],1,Ceiling[n/2]]
```

A regra do *cellular automaton* pode também ser representada por uma lista. Para a regra 30 a lista, obtida com funções do programa *Mathematica*, é dada por:

```
ElementaryRule[num_Integer]:= IntegerDigits[num,2,8]
```

Dada uma regra junto com uma lista representando o estado "a" de um *cellular automaton* em uma dada etapa, a regra seguinte fornece o estado na próxima etapa:

```
CAStep[rule_List,a_List]:  
= rule[[8 - (RotateLeft[a] + 2(a  
+ 2RotateRight[a]))]]
```

A lista de estados correspondentes à evolução para "t" passos é obtida com:

```
CAEvolveList[rule_,init_List,t_Integer]:  
= NestList[CAStep[rule,#]&,init,t]
```

Um gráfico da evolução do processo, mostrado na Figura 62, pode ser obtido usando:

```
CAGraphics[history_List]:  
= Graphics[Raster[1  
- Reverse[history]],AspectRatio -> Automatic]
```

Com estas definições o *Mathematica* pode gerar a imagem do *Cellular Automaton* por meio da função:

```
Show[CAGraphics[CAEvolveList[ElementaryRule[30],  
CenterList[300],150]]]
```

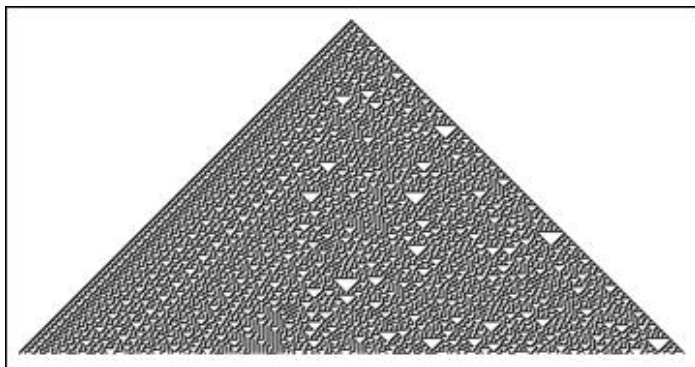


Figura 62 - Gerador de números aleatórios com Autômato celular, regra 30.

Conforme Beck (2011) a qualidade de um gerador linear congruencial depende fortemente das constantes m , a e b . Todo gerador congruencial é cíclico, e o período do ciclo é sempre menor do que m , portanto um grande valor de m deve ser utilizado.

Além disto, o coeficiente de correlação entre dois números consecutivos é inversamente proporcional as constantes m e a , portanto estas duas constantes devem ser de ordem elevada. A semente x_0 deve ser um número grande, inteiro e ímpar. Estes conjuntos de especificações não são suficientes para garantir a boa qualidade de um gerador congruencial.

6.8.5 Teste de geradores congruenciais

A qualidade de um gerador de números aleatórios é medida a partir da uniformidade e da independência dos números obtidos. Os números gerados podem ser testados quanto à independência e quanto à uniformidade por meio de testes estatísticos padronizados.

Uma maneira simples e visual de verificar a uniformidade das amostras obtidas com o gerador congruencial é ordenar as n_{si} amostras em ordem crescente e atribuir a cada valor amostrado um percentil:

$$F_U(u_k) = P[\{U < u_k\}] \approx \frac{k}{n_{si}} \quad (194)$$

Os pontos $(k, F_U(u_k))$ assim obtidos são plotados em um gráfico, e devem resultar em uma linha reta entre os pontos $(0,0)$ e $(n_{si},1)$.

A Figura 63 ilustra um teste de uniformidade deste gerador, para uma amostra com 500 valores obtida com o gerador linear congruencial gerador proposto por Lehmer (1949, LGC $(m,a,b,x_0) = (10^8+1,23,0,47$

594118). Pode-se observar que os números gerados têm, aparentemente, uma distribuição uniforme.

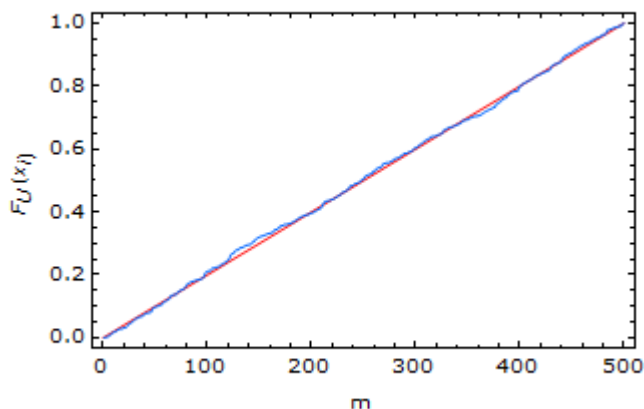


Figura 63 - Teste de uniformidade do gerador $LGC(m, a, b, x_0)$.

Conforme Beck (2011), o teste de uniformidade mostrado na Figura 63 não é muito robusto. Um teste mais robusto é o chamado método da partição do hipercubo unitário.

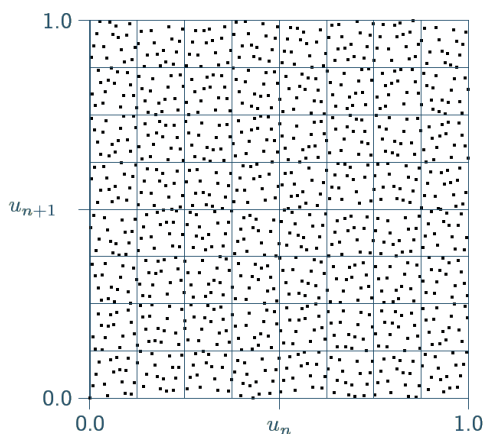


Figura 64 - Espaço $([0,1]^2)$ dividido em partes iguais.

Se os números amostrados tem distribuição uniforme, então o mesmo número de pontos deveria ser observado em cada quadra. Uma verificação visual pode ser feita para analisar a uniformidade da

distribuição dos números no espaço e a ausência de tendências na geração da amostra.

Em uma versão “plana” os pontos x_i são plotados em um gráfico bidimensional $([0,1]^2)$ e cada ponto neste gráfico é uma dupla (x_i, x_{i+1}) . O espaço $([0,1]^2)$ é dividido em partes iguais, formando quadras conforme um exemplo genérico mostrado na Figura 64.

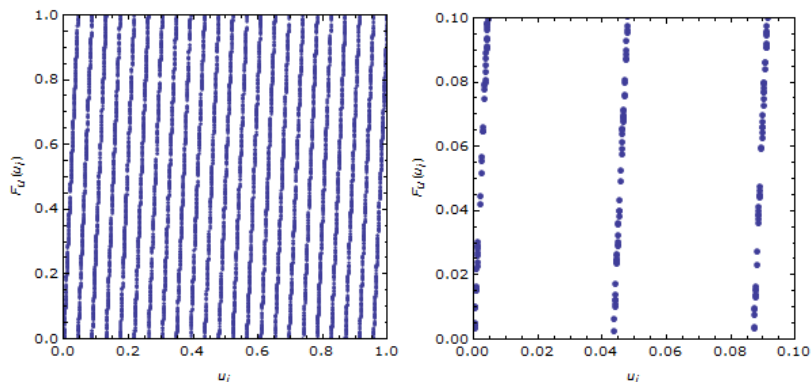


Figura 65 - Teste de uniformidade do gerador proposto por Lehmer (1949) com 10000 valores. $LGC(10^8 + 1, 23, 0, 47\ 594\ 118)$

A Figura 65 ilustra o resultado deste teste de uniformidade para o gerador proposto por Lehmer (1949), para uma sequência com 10000 valores. Esta figura apresenta a existência de tendências na geração da amostra por este gerador proposto por Lehmer (1949).

Um teste de uniformidade ainda mais robusto é o método da partição do hipercubo unitário na sua versão 3D. Neste teste cada ponto é um terno (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) plotado em um gráfico tridimensional $([0,1]^3)$.

A Figura 66 ilustra este teste de uniformidade para os geradores de Lehmer (1949) e do gerador de números aleatórios do programa *Mathematica* com o uso da função *RandomReal* para um conjunto de 50000 valores.

Observa-se neste teste de uniformidade do gerador proposto por Lehmer (1949), uma forte tendência dos valores da amostra de se agruparem em planos preferencias. Esta tendência evidencia uma falha importante neste gerador.

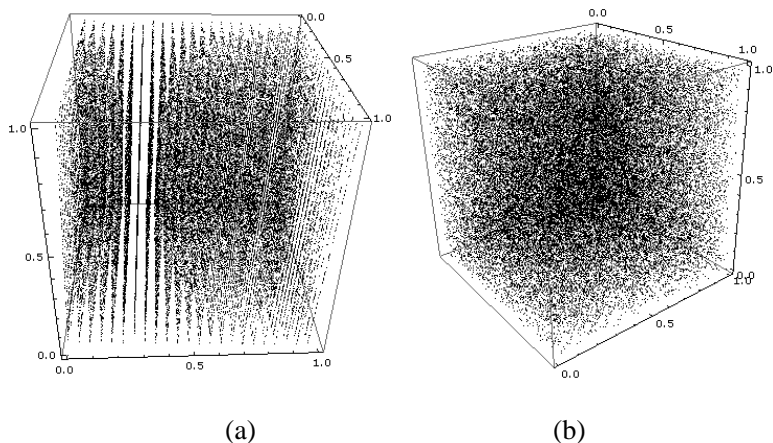


Figura 66 - Teste de uniformidade do gerador proposto por Lehmer (1949) e da função *RandomReal* do *Mathematica* para um conjunto de 50000 valores.

A Figura 67 apresenta o teste de uniformidade do gerador de números aleatórios do programa *Mathematica* com o uso da função *RandomReal* para um conjunto de 10000 valores.

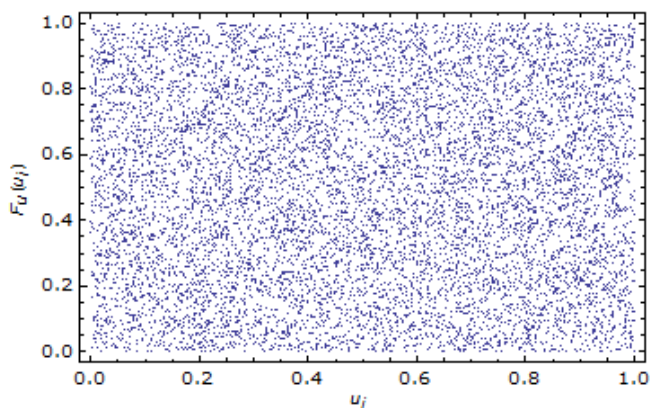


Figura 67 - Teste de uniformidade do gerador da função *RandomReal*.

A Figura 68 apresenta o teste de partição do hipercubo unitário, para o do gerador de números aleatórios do programa *Mathematica* com o uso da função *RandomReal*, no espaço $([0,1]^3)$, para um conjunto de 10000 valores. Não é possível perceber nenhuma tendenciosidade deste gerador.

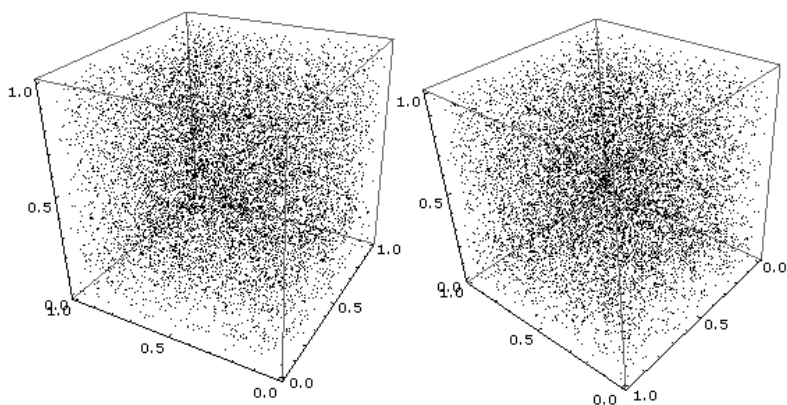


Figura 68 - Teste de uniformidade do gerador da função *RandomReal* do *Mathematica* em $([0,1]^3)$, para um conjunto de 10000 valores.

6.8.6 Geração de variáveis aleatórias

A geração de variáveis aleatórias de acordo com uma distribuição específica é essencial para a simulação pelo Método de Monte Carlo. Para gerar uma sequência que obedeça a uma distribuição de probabilidades qualquer, deve-se, primeiramente, gerar uma sequência que obedeça a uma distribuição uniforme e depois efetuar a transformação adequada para a distribuição desejada. O processo é mostrado na Figura 69. Este processo é conhecido como *técnica da transformação inversa*. Neste processo, conforme Nowak e Collins (2000), a função CDF das variáveis aleatórias é cotejada com a função CDF da distribuição de variáveis aleatórias uniforme com valores entre zero e um, e a equação $x_i = F_X^{-1}(u_i)$ obtida é solucionada para se obter a variável x_i .

O procedimento, conforme mostrado na Figura 69, consiste em:

- 1) Gerar uma amostra de valores u_i de probabilidades que obedecem a uma distribuição uniforme com valores entre zero e um. Essa geração é feita a partir da geração de números aleatórios pelo computador truncando-se a quantidade de casas decimais que forem necessárias.
- 2) Calcular a correspondente variável aleatória discreta referente à u_i com uma transformação isoprobabilística inversa, ou seja, $F_X^{-1}(u_i)$.
- 3) Gerar a respectiva variável física mediante uma transformação para o espaço físico dado por, $x_i = F_X^{-1}(x_i)$.

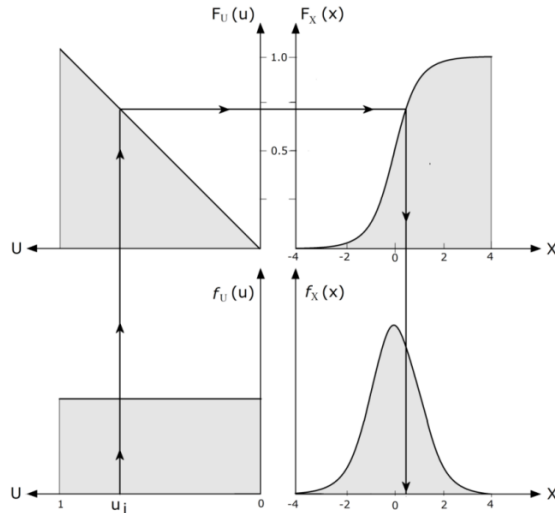


Figura 69—Geração de variáveis aleatórias por transformação inversa.

6.8.7 Geração de amostra de uma variável aleatória no programa *Mathematica*

A obtenção de uma amostra de uma variável aleatória com funções de distribuição de probabilidade $f_X(x)$ com o programa CAS *Mathematica* pode ser feita com o seguinte procedimento:

$x = \text{Table}[\mu x * \text{RandomReal}[\text{NormalDistribution}[0,1]]\sigma x, \{i, \text{Amostra}\}]$
onde:

- μ_x é o valor médio da variável x .
- σ_x é o desvio padrão da variável x obtido com a multiplicação da média da variável x pelo coeficiente de variação (COV) da variável x .
- *Amostra* é o número de valores da amostra gerada.
- *NormalDistribution* é uma função do *Mathematica* que representa a distribuição normal padrão (neste caso) com média zero e desvio padrão unitário. *RandomReal* é uma função do *Mathematica* que calcula um número aleatório real a partir de uma função, neste caso a partir da distribuição normal padrão.
- *Table* é uma função do *Mathematica* que gera uma lista de valores para a expressão $[exp]$ com n valores de i até o número da amostra.

A seguir será apresentado um exemplo de resultado da geração de uma amostra com 100 valores da variável aleatória para a resistência à compressão média do concreto à compressão f_{cm} . Com um valor médio de f_{cm} igual a 30 MPa e um coeficiente de variação de 0,12 obtém-se a seguinte tabela para um amostra com 100 valores. O histograma desta amostra gerada é apresentado na Figura 76 junto com a função de distribuição de probabilidades (PDF).

Tabela 32 – Valores da amostra da resistência à compressão média do concreto f_{cm} .

30.13	29.92	28.94	27.4	32.26	28.55	31.82	30.79	30.23	25.74
28.46	29.88	31.03	34.53	29.3	31.47	29.11	34.44	44.13	30.21
24.95	28.01	27.45	32.7	29.39	29.37	27.58	30.38	26.39	27.14
28.4	34.94	32.01	31.43	31.02	31.38	26.27	31.93	32.76	31.17
31.69	32.19	28.63	37.79	33.65	29.43	29.23	24.46	24.89	33.31
31.39	35.95	28.69	22.9	31.	33.72	25.96	30.67	33.03	24.61
32.03	30.02	32.14	27.02	33.23	29.94	29.5	24.5	34.13	28.9
28.83	27.77	37.7	30.73	31.52	28.6	27.4	28.34	28.07	26.65
27.95	30.06	33.02	30.38	34.08	32.96	30.01	35.28	27.57	28.6
24.65	26.8	26.81	21.97	28.54	34.08	26.39	29.6	32.29	28.83

6.8.8 Histogramas das variáveis aleatórias de projeto

Histogramas típicos de frequência das variáveis de projeto aleatórias, para a viga VR2050S6, obtidas com o procedimento do item 6.8.7 são apresentados a seguir como exemplo, junto com a função de distribuição de probabilidades (PDF) da amostra.

As variáveis aleatórias de projeto deste exemplo são: o vão da viga; a umidade relativa do ambiente; as dimensões da seção transversal; o diâmetro e a posição do centro de gravidade da armadura de flexão; resistência à compressão e a tração do concreto; módulo de elasticidade do concreto e carga acidental quase permanente. As amostras foram geradas com 1000 valores.

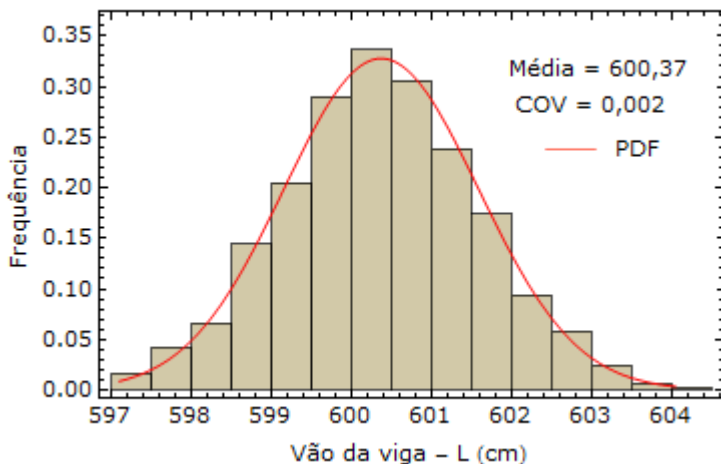


Figura 70 - Histograma da distribuição da amostra do vão da viga VR2050S6, PDF-Distribuição Normal.

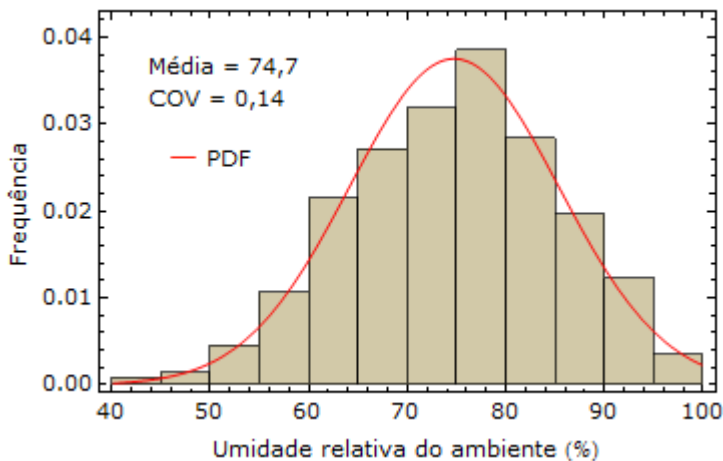


Figura 71 - Histograma da distribuição da amostra da umidade relativa do ambiente para a viga VR2050S6, PDF - Distribuição Normal Truncada.

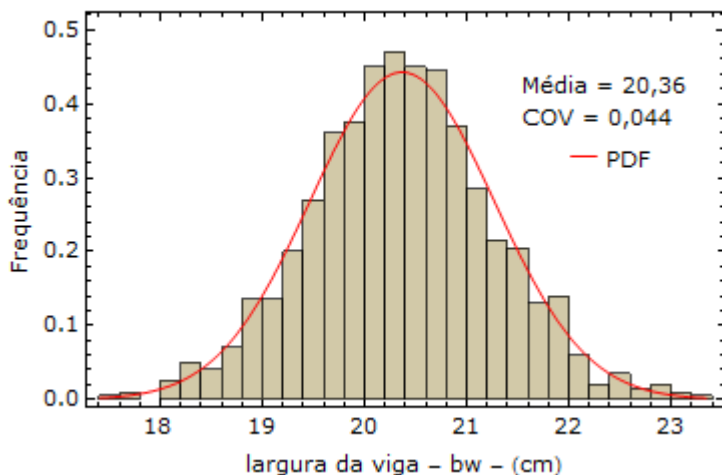


Figura 72 - Histograma da distribuição da amostra da largura da viga VR2050S6, PDF- Distribuição Normal.

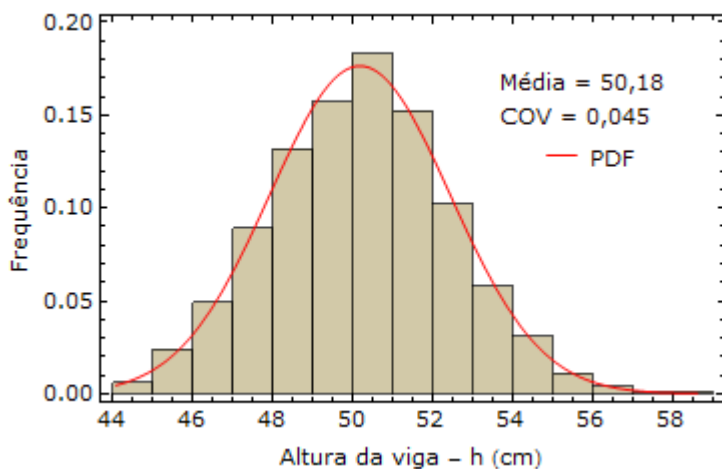


Figura 73 - Histograma da distribuição da amostra da altura da viga VR2050S6, PDF-Distribuição Normal.

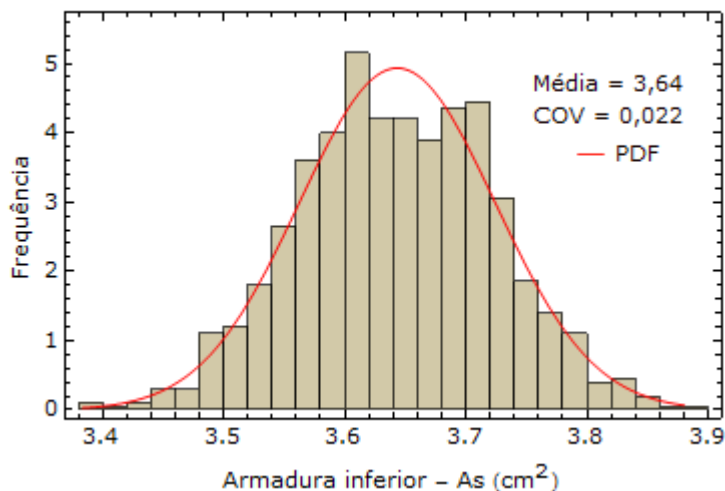


Figura 74 - Histograma da distribuição da amostra da armadura inferior da viga VR2050S6, PDF Distribuição Normal.

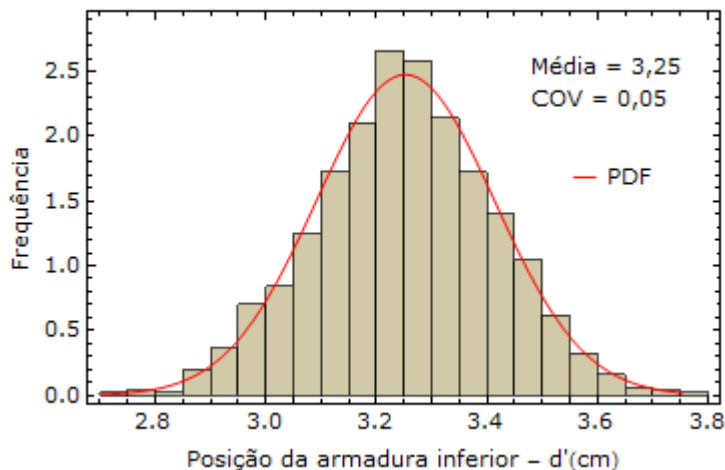


Figura 75 - Histograma da distribuição da amostra da posição da armadura inferior da viga VR2050S6, PDF Distribuição Normal.

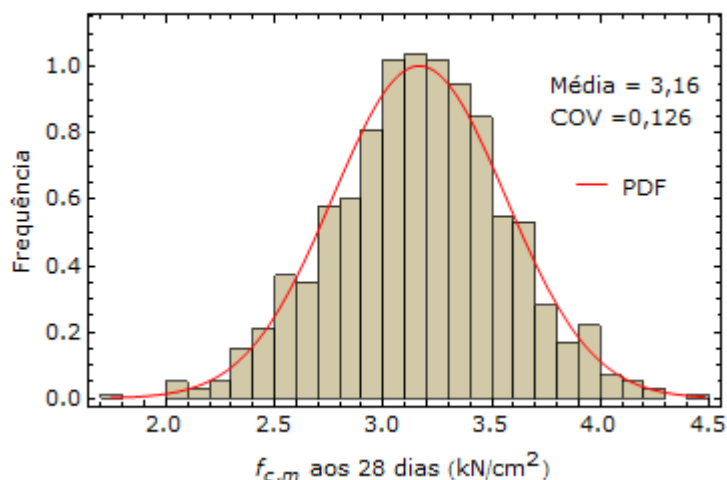


Figura 76 - Histograma da distribuição da amostra da resistência à compressão média do concreto (f_{cm}) da viga VR2050S61, PDF Distribuição Normal.

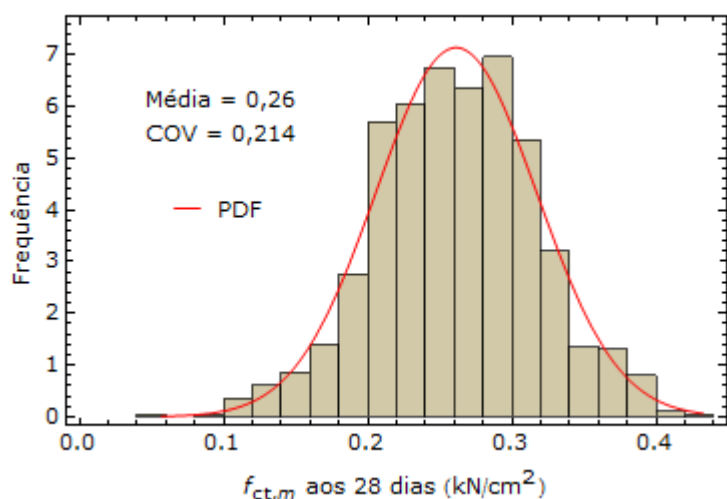


Figura 77 - Histograma da distribuição da amostra da resistência à tração média do concreto (f_{ctm}) da viga VR2050S6, PDF Distribuição Normal.

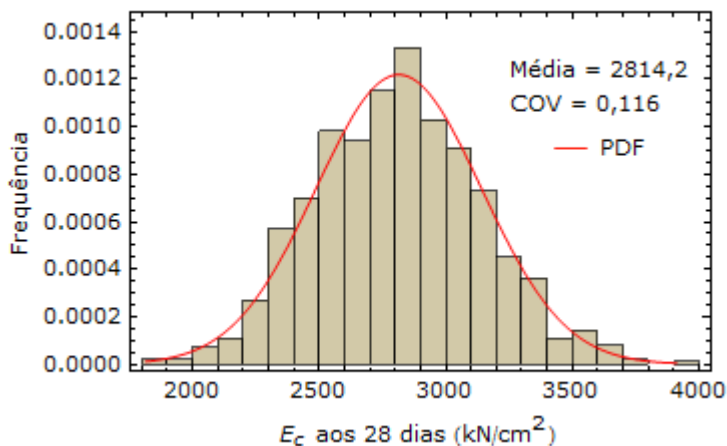


Figura 78 - Histograma da distribuição da amostra do módulo de elasticidade inicial do concreto (E_{ci}) da viga VR2050S6, PDF Distribuição Normal.

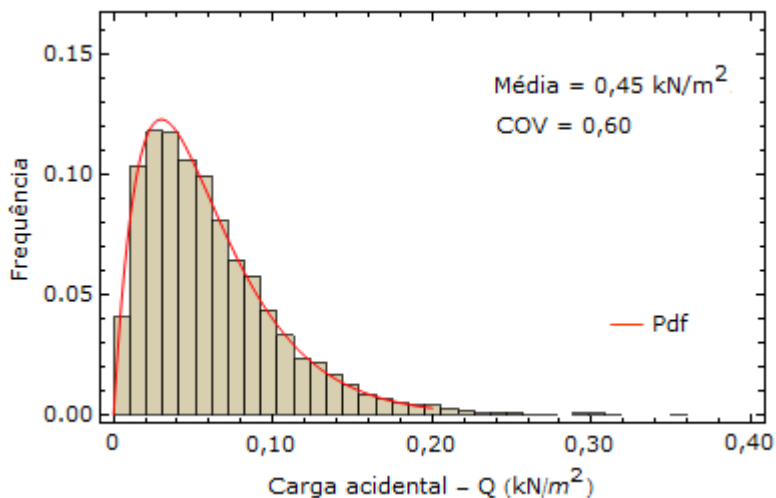


Figura 79 - Histograma da distribuição da amostra da carga acidental (Q) da viga VR2050S6, PDF- Distribuição Gamma.

6.8.9 Determinação do número de simulações

Antes de executar as simulações pelo Método de Monte Carlo é necessário determinar o número de simulações necessárias. Para se determinar um número adequado, diversas simulações foram realizadas com as vigas e lajes da Tabela 35. A variabilidade mantém-se praticamente constante acima de 500 simulações.

Para as simulações deste trabalho foram selecionadas então um número de 500 a 1000 simulações, que podem ser consideradas suficientes para realizar a maioria dos estudos paramétricos de análise da variabilidade e de determinação do índice de confiabilidade.

6.8.10 Programa desenvolvido

Para a simulação de Monte Carlo, desenvolveu-se neste trabalho um programa no sistema computacional algébrico (CAS) *Mathematica* versão 5.2, composto de diversas funções que processam diversas etapas, conforme mostrado na Figura 80, fluxograma geral da simulação.

Um sistema CAS é um *software* que facilita o uso da matemática simbólica. A funcionalidade básica deste sistema é a manipulação de expressões matemáticas em sua forma simbólica.

As expressões manipuladas por um sistema CAS incluem os polinômios em múltiplas variáveis; funções padrões de expressões (seno, exponencial etc.); várias funções especiais (Γ , ζ , erf, funções de Bessel etc.); funções arbitrárias e expressões; otimização; derivadas, integrais, simplificações, somas, e produtos de expressões; séries truncadas com expressões como coeficientes, matrizes de expressões, listas, dentro outras. O domínio numérico típico inclui inteiros, reais, complexos, racionais e algébricos.

Os primeiros sistemas de computação algébrica populares foram o muMATH, o Reduce, o Derive (baseado no muMATH) e o Macsyma; uma cópia popular do Macsyma chamada Maxima está em uso atualmente. Os sistemas CAS mais populares hoje em dia são o *Mathematica* e o Maple. Uma alternativa em *software* livre disponível para uso é o Sage, licenciado sob GPL.

Programação funcional é um tipo de programação que enfatiza a avaliação de expressões ao invés de execução de comandos. As expressões nesse tipo de linguagem são formadas usando-se funções para combinar determinados valores. A linguagem de programação funcional é baseada no conceito de funções matemáticas.

Uma função é referencialmente transparente, ou seja, seu resultado só depende dos valores de seus argumentos. Esta propriedade tem como uma importante consequência o fato de que, uma vez que a função foi executada com sucesso, ela sempre executará corretamente, reagindo da mesma forma, não importando o contexto em que ela se encontra.

O fluxograma geral da simulação pelo método de Monte Carlo para a análise da variabilidade dos deslocamentos em vigas de concreto armado, utilizado neste trabalho, ilustrado na Figura 80, é composto pelas seguintes funções:

- A função *Variáveis de projeto* recebe os dados de entrada do modelo mecânico da viga e gera as amostras das variáveis aleatórias de projeto. Estes dados de entrada compõem-se de valores determinísticos e dos parâmetros estatísticos, média, desvio padrão ou coeficiente de variação (COV), e os limites superior e inferior das variáveis aleatórias descritos na seção anterior.
- O gerador de números aleatórios adotado é a função *RandomReal* do *Mathematica*. O tamanho das amostras geradas é controlado pela variável *Ndata* que pode variar de 1 a 50000.
- Para a simulação de Monte Carlo, duas funções principais foram programadas no *Mathematica*. Além da função *variáveis de Projeto*, foi criada a função *Carga-Deslocamento* que determina a flecha no meio do vão em função da carga aplicada na viga de cada amostra.
- A função *Carga-Deslocamento* é uma função de ordem superior, i.e. função de outra função, ela utiliza outras funções para o cálculo da curva Carga-Deslocamento de cada amostra.
- A função *Variáveis de projeto* gera uma lista para cada variável de projeto de uma amostra, a partir dos parâmetros estatísticos, média e coeficiente de variação (COV). A função *Table* do *Mathematica* gera uma lista de valores aleatórios de cada variável de projeto a partir da expressão:

$$x = \text{Table}[\mu x * \text{RandomReal}[\text{NormalDistribution}[0,1]]\sigma x, \{i, \text{Amostra}\}]$$

- A função *RandomReal* gera números reais aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1. A função combinada *RandomReal* [*NormalDistribution* [0,1]], gera variáveis aleatórias a partir de uma distribuição normal padrão com média 0 e desvio padrão 1.

- Para outras distribuições pode-se usar a mesma função com a função combinada específica do programa *Mathematica*. Pode-se gerar variáveis aleatórias de outras distribuições contínuas, tais como distribuições Lognormais, distribuições do tipo Gamma, Beta, Exponencial, Weibull, funções de valores extremos etc.
- Para o cálculo da relação momento-curvatura foi desenvolvida a função *Momento-Curvatura*. Esta função calcula a relação momento-curvatura de uma seção de concreto a partir dos parâmetros e das relações constitutivas dos materiais e da geometria da seção. Esta função utiliza a função *Linha neutra* para determinação da posição da linha neutra em equilíbrio.
- Para as relações constitutivas dos materiais utilizadas no cálculo da relação momento-curvatura, foram programadas funções específicas. Também foram programadas funções específicas para o cálculo dos coeficientes de fluência e de retração.
- Foi programada uma função denominada *Elementos Finitos Viga Bernoulli* para o cálculo dos deslocamentos, reações e esforços de vigas isoladas e contínuas pelo Método dos elementos finitos.
- Para a simulação pelo Método de Monte Carlo de uma amostra de vigas a função *Carga-Deslocamento* gera uma amostra das vigas analisadas com os seus respectivos deslocamentos máximos no meio do vão.

Esta amostra possui, em forma de tabela, todos os dados de resultados das análises de cada viga da simulação. Dentre estes dados estão as relações momento-curvatura e os gráficos de carga-deslocamento que podem ser plotados em conjunto em uma única figura para uma apresentação gráfica da variabilidade destes deslocamentos.

A análise da variabilidade, geração dos histogramas e a análise de confiabilidade, com a determinação das probabilidades de falha são feitas com diversas funções programadas e diversas funções específicas do programa *Mathematica*.

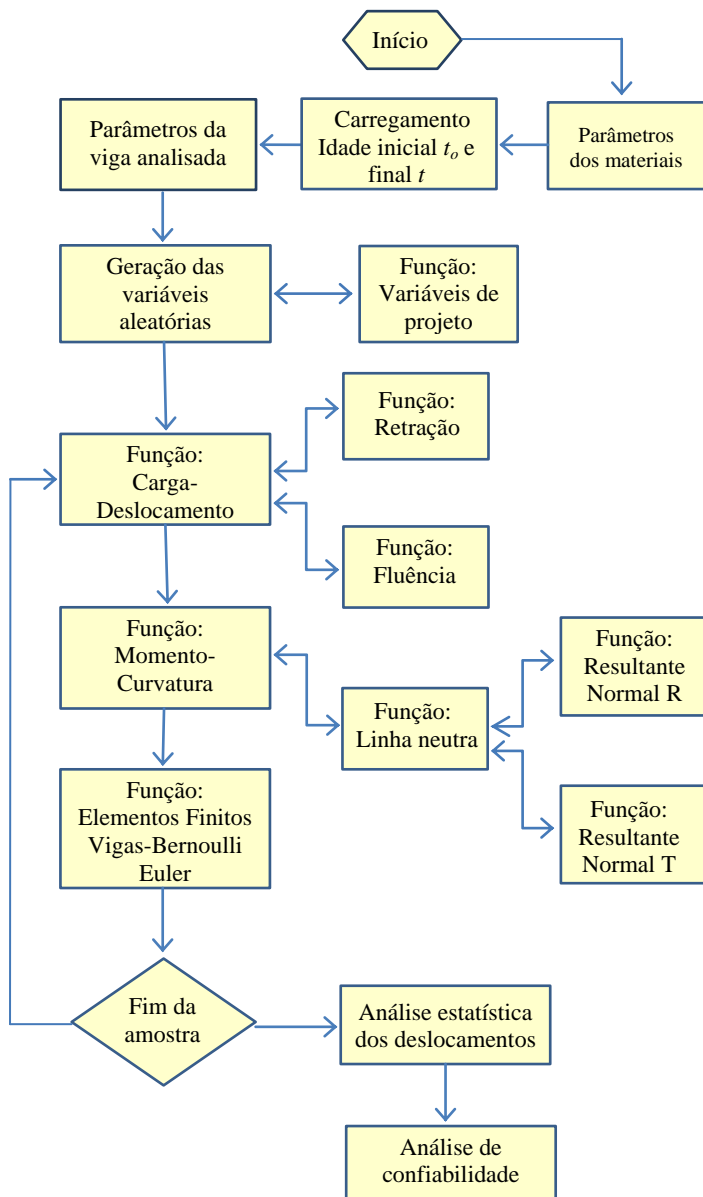


Figura 80 - Fluxograma geral da simulação pelo método de Monte Carlo

7. ESTUDO PARAMÉTRICO

7.1 Introdução

Para investigar a variabilidade dos deslocamentos verticais de vigas de concreto armado em função de diversos parâmetros de projeto, serão realizados neste capítulo diversos estudos paramétricos e analisados os efeitos das variáveis de projeto usando simulações pelo método de Monte Carlo.

Vigas biapoiadas e lajes unidirecionais e biapoiadas de concreto armado com seção retangular foram dimensionadas para suportar lajes de pavimentos de edifícios residenciais e comerciais de múltiplos andares. As vigas e lajes foram projetadas com base na capacidade última ELU e dimensionadas de acordo com os estados limites de serviço ELS, conforme as prescrições da norma brasileira NBR 6118 (2007). Com estas condições de projeto, usando uma simulação pelo método de Monte Carlo, foram calculadas as distribuições de probabilidade dos deslocamentos imediatos e dos deslocamentos totais de longa duração. Os deslocamentos totais foram obtidos pela superposição das componentes imediatas e as componentes dos deslocamentos devidos à retração e à fluência.

A análise foi feita com duas histórias de carregamento compostas por parcelas do carregamento acidental e do carregamento permanente ou sustentado, em combinações de ações de serviço quase permanentes.

As flechas médias obtidas na simulação de Monte Carlo também serão comparadas com as flechas calculadas pelo método simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007).

Os parâmetros de projeto considerados neste estudo paramétrico são os seguintes: taxa de armadura, relação entre o momento fletor atuante de serviço e o momento de fissuração, relação entre a carga acidental e a carga permanente e a esbeltez das vigas e lajes (relação entre vão e altura da viga ou da laje).

7.2 Resultados estatísticos dos ensaios comparativos

Análises com simulação de Monte Carlo foram realizadas para as vigas utilizadas nos estudos de verificação, entre o modelo numérico implementado e os ensaios experimentais, com o objetivo de estudar alguns resultados estatísticos das flechas destas vigas. Foram analisados os ensaios de Buckhouse (1997) e os ensaios de Beber (1999).

7.2.1 Vigas ensaiadas por BUCKHOUSE (1997)

Neste estudo com os ensaios experimentais, são usadas variáveis aleatórias de acordo com os modelos apresentados no item 6.7. Os dados de ensaio das vigas são considerados como valores médios. Os valores dos materiais são os da Tabela 6 e as dimensões da viga são as mostradas na Figura 35. Os demais parâmetros estatísticos, tais como o COV e o tipo de distribuição foram obtidos da Tabela 32.

A Figura 81 apresenta os resultados de uma simulação (com uma amostra de 1000 valores) feita para a viga C1 ensaiada por Buckhouse (1997).

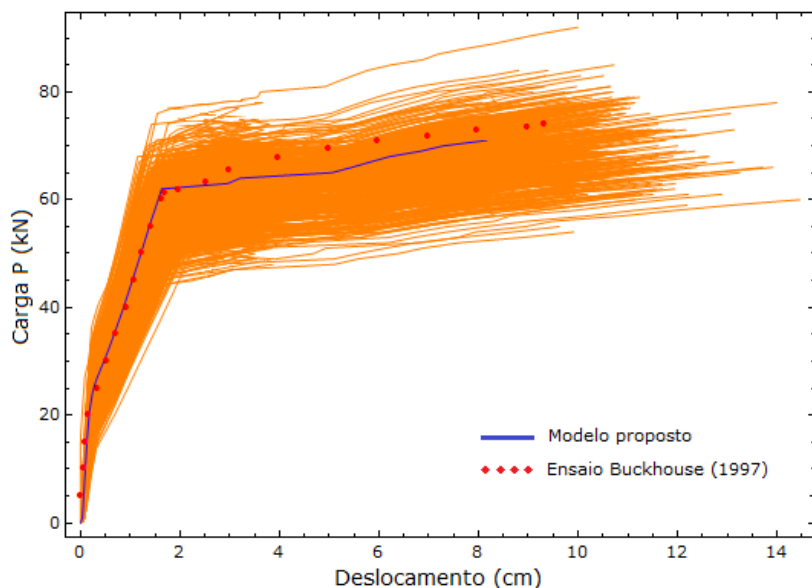


Figura 81 - Diagrama carga-deslocamento da simulação de Monte Carlo, com o modelo implementado para o ensaio de BUCKHOUSE (1997), viga C1. β_t varia de 1,84 a 1,81.

No gráfico da Figura 81 estão destacados os diagramas carga-deslocamento calculados com os valores médios dos parâmetros desta viga e o resultado do ensaio.

Na Figura 82 é apresentado o histograma da distribuição das flechas imediatas para um nível de carga P igual a 40 kN. O histograma mostra que a maioria dos resultados está agrupada em torno do valor médio, igual a 0,96 cm.

O desvio padrão é igual a 0,22 cm, e o coeficiente de variação (COV) igual a 0,23 desta distribuição é elevado, indicando uma grande variabilidade das flechas imediatas desta viga para este nível de carga.

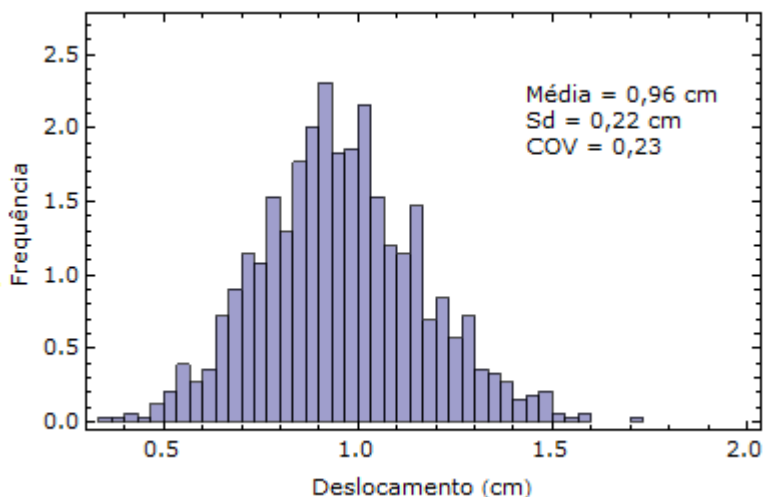


Figura 82 - Histograma para os deslocamentos imediatos da viga experimental C1 de Buckhouse (1997).

Diagrama Q-Q

Procedimentos gráficos constituem uma forma visual bastante útil de verificar se uma distribuição teórica se ajusta a uma distribuição empírica ou sequência de dados.

O gráfico *quantil-quantil plot* ou *Q-Q* é utilizado para determinar se dois conjuntos de dados pertencem à mesma distribuição de probabilidades. Em tais gráficos os pontos são formados pelos quantis amostrais e se no resultado os pontos alinham-se numa reta de inclinação 1, as distribuições das duas amostras podem ser consideradas as mesmas.

A Figura 83 mostra um gráfico *Q-Q* comparando uma distribuição normal de dados gerada aleatoriamente no eixo vertical e uma distribuição independente normal padrão no eixo horizontal. A linearidade dos pontos sugere que os dados da distribuição gerada aleatoriamente são normalmente distribuídos.

Os quantis representando dois atributos ou fenômenos que são considerados associados podem ser comparados usando o diagrama *Q-Q*.

Isto é feito como um meio de comparação de duas distribuições de probabilidades. Procede-se inicialmente com a distribuição do *ranking* e o cálculo das frequências relativas acumuladas para um diagrama de quantil para cada conjunto de dados.

Os dois conjuntos são então associados graficamente com o traçado dos seus diagramas com as frequências acumuladas e o ajuste pode ser verificado.

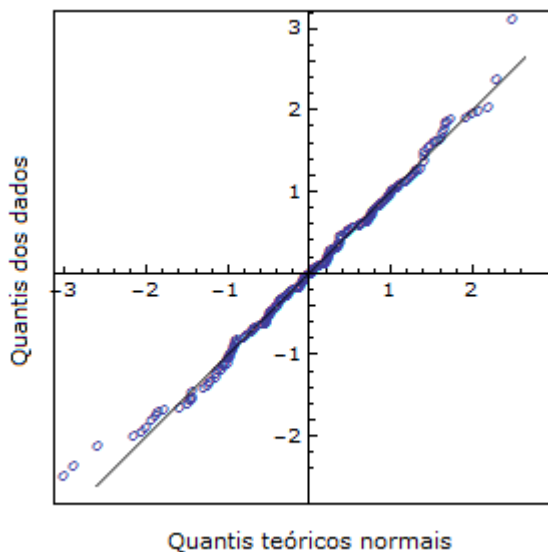


Figura 83 - Q - Q plot de uma distribuição amostral de dados e a distribuição normal padrão.

Na Figura 84 a frequência acumulada de uma distribuição normal com a mesma média e desvio padrão da distribuição dos deslocamentos obtidos na análise dos deslocamentos da distribuição das flechas imediatas da viga do ensaio de Buckhouse (1997), é traçado em um gráfico Q - Q . A linha diagonal representa a hipótese de distribuição normal a ser testada.

Neste caso pode-se observar que a distribuição normal dos dados pode ser considerada uma função de densidade de probabilidade adequada para representar a distribuição dos deslocamentos imediatos desta viga para este nível de carregamento considerado.

A Figura 85 apresenta o histograma dos deslocamentos da distribuição das flechas imediatas da viga do ensaio de Buckhouse

(1997), em conjunto com uma distribuição normal com a mesma média e desvio padrão desta distribuição.

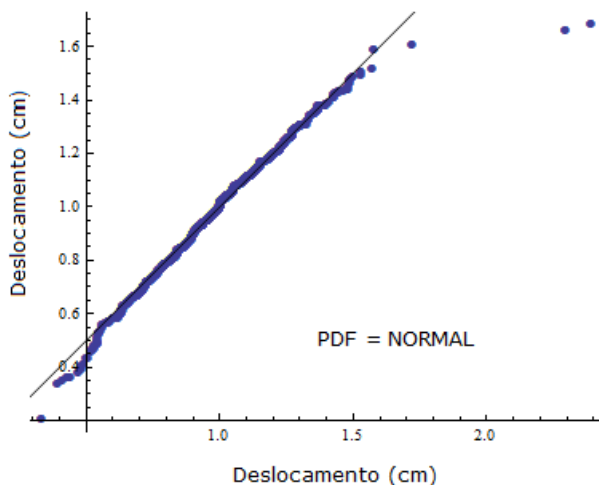


Figura 84 - Gráfico Q- Q, deslocamentos imediatos e distribuição normal da viga C1, Buckhouse (1997).

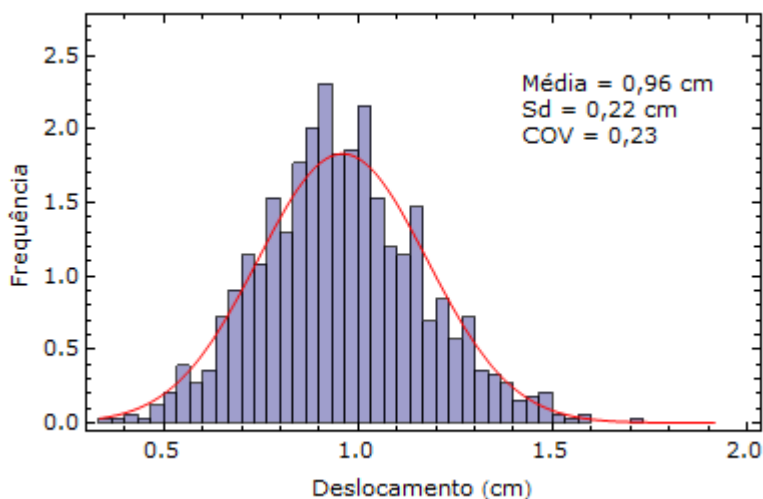


Figura 85 - Histograma para os deslocamentos imediatos uma PDF normal, viga C1, Buckhouse (1997).

7.2.2 Vigas ensaiadas por BEBER (1999)

Análises com a simulação de Monte Carlo também foram realizadas para as vigas utilizadas nos estudos de comparação entre o modelo numérico e os ensaios experimentais das vigas da série VT1 e VT2 de Beber (1999). Para as variáveis aleatórias foram considerados como valores médios os dados apresentados na Tabela 8. Os demais parâmetros estatísticos, tais como o COV e o tipo de distribuição foram obtidos da Tabela 32. Os resultados de uma simulação com uma amostra de 1000 valores feita para estas vigas é apresentado na figura abaixo, junto com a curva carga-deslocamento para os valores médios.

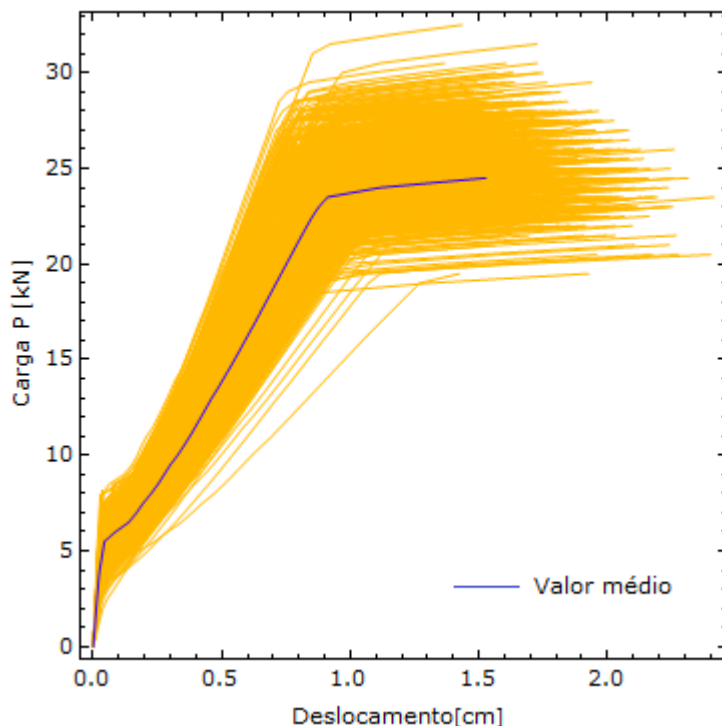


Figura 86 - Diagrama carga-deslocamento da simulação de Monte Carlo, com o modelo implementado para o ensaio de Beber (1999).

No gráfico da Figura 87 estão destacados os diagramas carga-deslocamento na região do momento de fissuração. Pode-se observar que para um nível de carga de serviço mais baixo, por exemplo, para $P_s = 6$ kN, a forma da distribuição dos deslocamentos é bem diferente

das distribuições mais conhecidas. Neste caso uma distribuição bimodal seria a mais indicada.

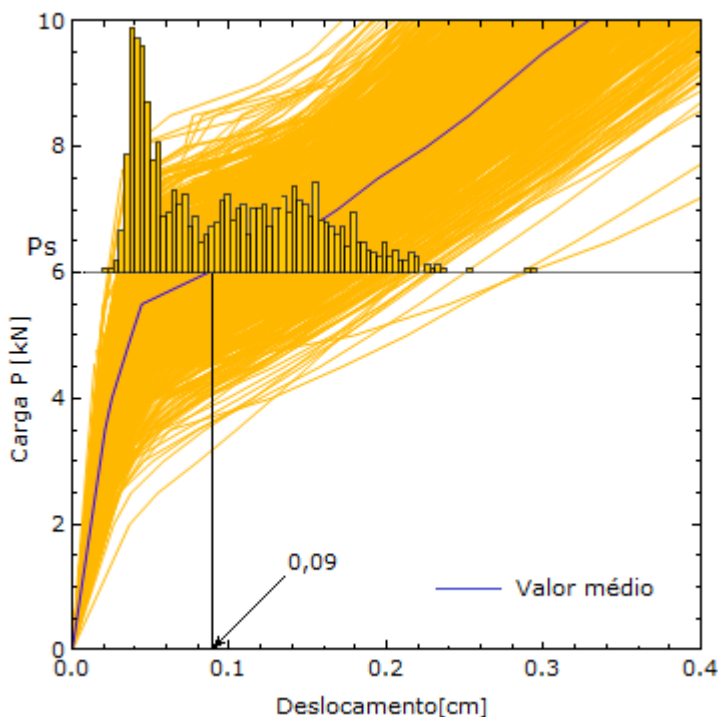


Figura 87 - Diagrama carga-deslocamento da simulação de Monte Carlo, com o modelo implementado para o ensaio de Beber (1999). Carga de serviço $P_s = 6$ kN.

O gráfico da Figura 88 apresenta o histograma da distribuição das flechas imediatas para o nível de carga de serviço P_s igual a 6 kN. O valor médio da distribuição é igual a 0,09 cm. Neste caso, como já mencionado a distribuição é bimodal. O desvio padrão é igual a 0,05 cm, e o coeficiente de variação, $COV=0,55$ desta distribuição é muito elevado, indicando uma grande variabilidade das flechas imediatas desta viga para este nível de carga.

A Figura 89 apresenta o histograma da distribuição das flechas imediatas para o nível de carga de serviço P_s igual a 12 kN. O histograma mostra que a maioria dos resultados está agrupada no entorno do valor médio, igual a 0,37 cm. O coeficiente de variação

(COV) igual a 0,17 para este nível de carga é menor que o nível de carga anterior.

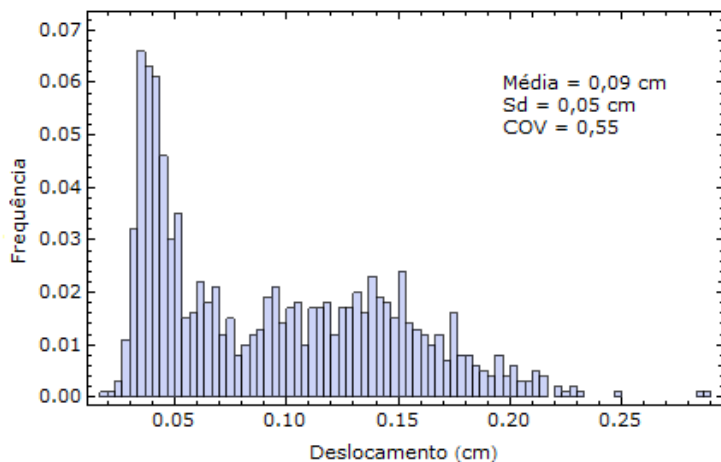


Figura 88 - Histograma para os deslocamentos imediatos da viga experimental C1, Beber (1999). Carga de serviço $P = 6 \text{ kN}$.

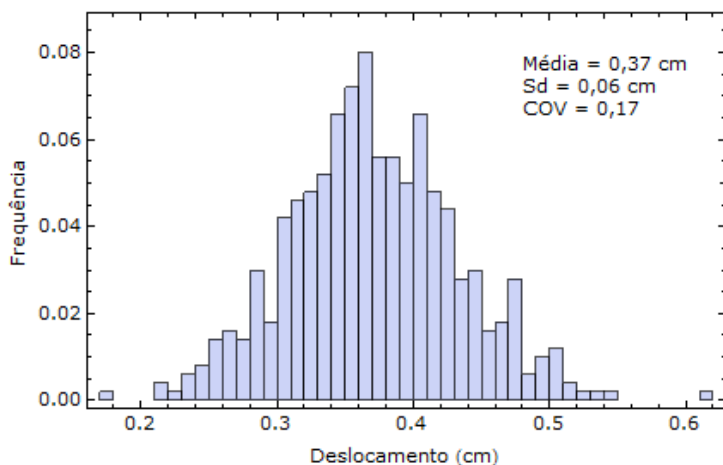


Figura 89 - Histograma para os deslocamentos imediatos da viga experimental C1, Beber (1999). Carga de serviço $P = 12 \text{ kN}$.

7.3 Variabilidade dos deslocamentos em vigas e lajes projetadas pela norma NBR 6118(2007)

Para estudar a variabilidade dos deslocamentos, serão consideradas vigas e lajes unidirecionais de concreto armado de seções retangulares, simplesmente apoiadas e projetadas com base no estado limite último (ELU) e ao estado limite de serviço (ELS) da NBR 6118 (2007).

As vigas simplesmente apoiadas foram submetidas a um carregamento de quatro pontos que é resultante das reações de vigas e lajes de um pavimento típico de edifícios residenciais e comerciais calculados com as combinações de ações de serviço quase permanentes já citadas anteriormente.

O modelo estrutural destes pavimentos com as vigas e lajes é mostrado na Figura 90 e na Figura 91. Os valores das propriedades dos materiais e as dimensões nominais são apresentados na

Tabela 33, Tabela 34 e Tabela 35. As taxas de armadura variam de 0,25 a 0,65 %.

Os parâmetros de projeto para as vigas (Figura 94) são: largura b variando de 17 a 25 e altura h de 50 cm, cobrimento de concreto 2 cm e vão L variando de 4 a 8 m. As lajes (Figura 95) tem largura b de 100 cm e altura de 25 cm, cobrimento de concreto 2 cm e vão L variando de 5 a 7,5 m. Os valores e as propriedades adotadas das variáveis aleatórias estão apresentados na Tabela 33.

A Figura 90 e a Figura 91 apresentam os esquemas estruturais das vigas isostáticas e biapoiadas das vigas VR e das lajes LR. A Figura 92 apresenta a forma do pavimento típico dos pavimentos de edifícios residenciais e comerciais de múltiplos andares utilizados nesta análise.

Foram consideradas lajes pré-fabricadas tipo painel unidirecional apoiadas em vigas secundárias que por sua vez se apoiam nas vigas VR e lajes LR. Cargas permanentes de revestimento de 1 kN/m^2 foram consideradas sobre as lajes além das cargas acidentais de projeto de $1,5 \text{ kN/m}^2$ para os pisos de edifícios residenciais e 2 kN/m^2 para os pisos de edifícios comerciais de acordo com a NBR 6120:1980 (ABNT 1980).

Os vãos das vigas secundárias (L_2) foram ajustados, para variar a carga concentrada sobre as vigas e para permitir um dimensionamento adequado ao ELU e ao ELS prescrito pela NBR 6118 (2007). Este ajuste foi feito de acordo com a necessidade para cada caso de viga e laje em estudo. Os parâmetros das características geométricas e armaduras dessas vigas e lajes são mostrados na Tabela 35.

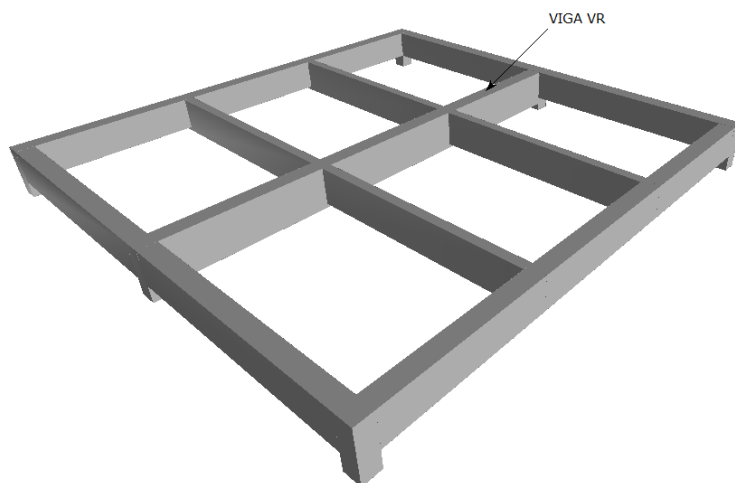


Figura 90 - Forma do pavimento com a viga isostática biapoiada VR.

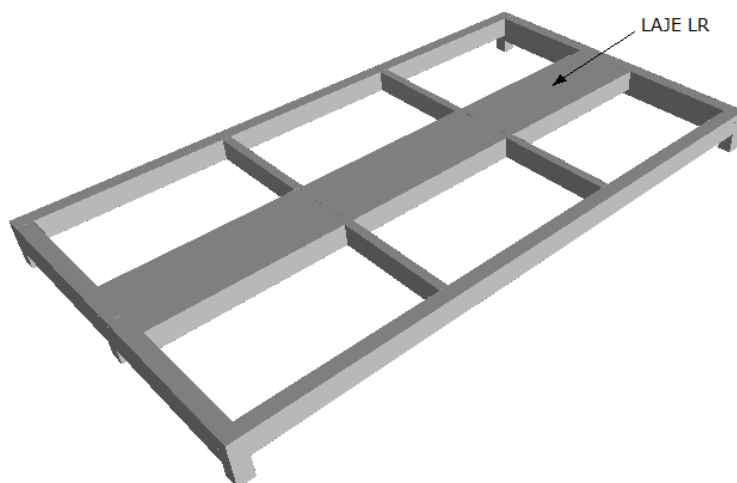


Figura 91 - Forma do pavimento com a laje isostática unidirecional e biapoiada LR.

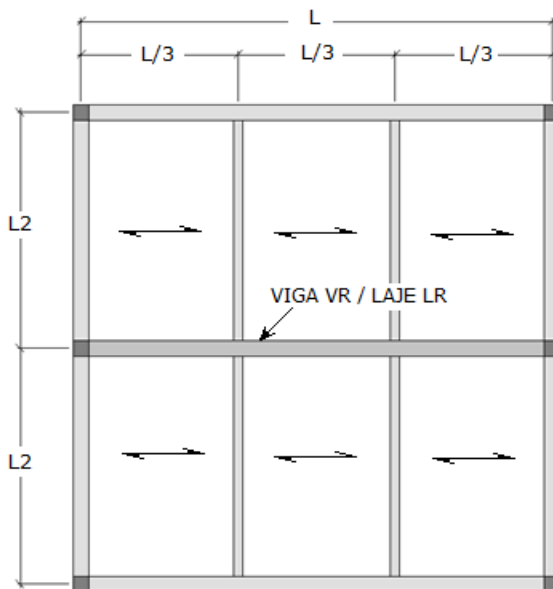


Figura 92 - Forma do pavimento com a viga isostática VR.

7.3.1 Carregamento aplicado para o estudo paramétrico

De acordo com as normas de projeto, em particular a NBR-6118 (2007), os deslocamentos transversais máximos ou flechas das vigas devem ser calculados para as combinações quase permanentes do carregamento, incluindo-se os efeitos da fissuração e das deformações diferidas do concreto. As combinações quase permanentes são combinações de ações que podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade deste período.

Em cada combinação, as ações permanentes são consideradas com os seus valores integrais e as ações variáveis são consideradas com os seus valores reduzidos por meio de um coeficiente $\Psi_2 < 1$, estabelecido na NBR-8681 (2007).

No caso particular de edifícios as cargas de serviço na combinação quase permanente podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura (pelo menos metade da vida útil da edificação). Nas combinações quase permanentes de serviço, portanto, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 \cdot F_{qk}$.

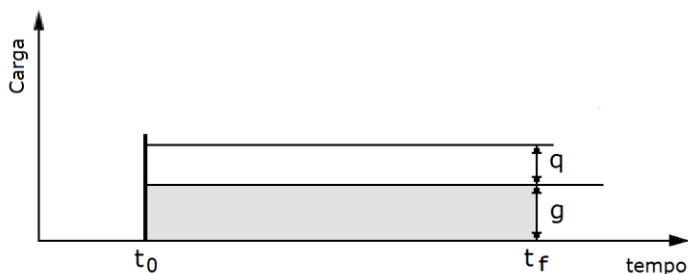


Figura 93 - Carregamento de longa duração adotado.

Tabela 33 – Resumo das variáveis aleatórias das vigas e lajes

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	f_{c28} (MPa)	0.176	Normal
f_{ctm}	$0,3f_{ck}^{2/3}$ (MPa)	0.218	Normal
E_{ci}	$5600f_{ck}^{1/2}$ (MPa)	0.119	Normal
A_{S2}	$0,99A_{s_{nom}}$ (cm ²)	0.024	Normal truncada
A_{S1}	$0,99A_{s_{nom}}$ (cm ²)	0.024	Normal truncada
f_y	$1,09 f_y$ MPa	0.050	Normal
E_s	21000 MPa	0.050	Normal
d'	$d' + 0,16$ (cm)	0.045	Normal
b	$b_n + 0,4$ (cm)	0.045	Normal
h	$h_n + 0,16$ (cm)	0.045	Normal
L	$L_n + 0,4$ (cm)	0.002	Normal
U_r	$U_{r_{nom}}$	0,15	Normal
G	$1,05 G_{nom}$	0,10	Normal
Q	$\Psi_2 Q_{nom}$	0,60	Gamma

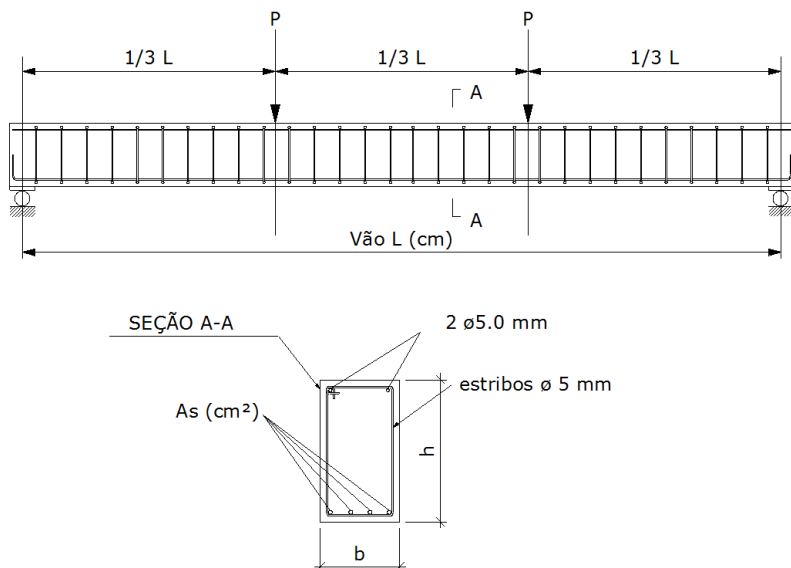


Figura 94 – Características das vigas VR dimensionadas de acordo com a NBR 6118(2007)

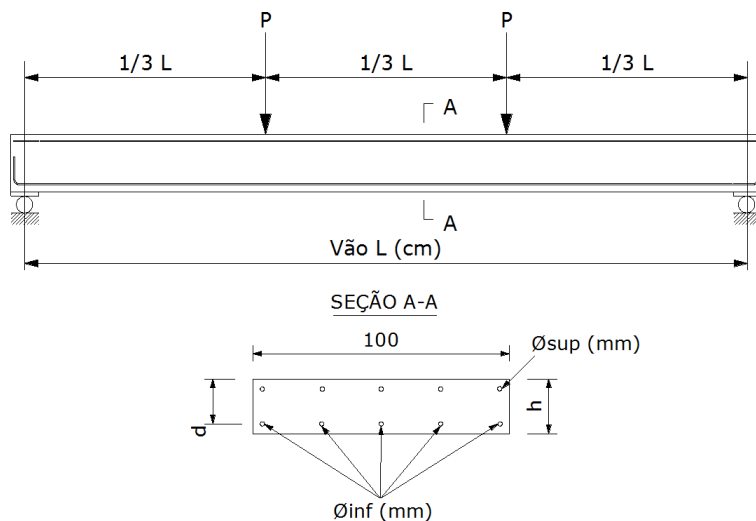


Figura 95 - Características das lajes LR dimensionadas de acordo com a NBR 6118(2007)

Tabela 34 - Resumo das características do concreto e do aço.

Classe (2)	Concreto			Armadura		
	f_{cm}^1 (MPa)	f_{ck} (MPa)	$f_{ct,m}^1$ (MPa)	E_{ci}^1 (MPa)	f_{ym} (MPa)	f_{um} (MPa)
C25	31,6	25	2,56	28000	545	640

1) Obtido a partir das propriedades do concreto aos 28 dias de idade.

Na Tabela 34 f_{cm} é a resistência média do concreto à compressão aos 28 dias e f_{ck} a resistência característica do concreto à compressão também aos 28 dias para a classe de resistência C25. O valor da resistência média do concreto à compressão f_{cm} foi calculado de acordo com o item 6.4.3 da NBR 12655 (1996), segundo a eq.(167). No cálculo do valor da resistência média do concreto à compressão f_{cm} foi considerado um desvio padrão S_d igual a 4 MPa.

O valor da resistência média do concreto à tração $f_{ct,m}$ foi calculado em função da resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias, f_{ck} , de acordo com o item 8.2.5 da NBR 6118 (2007).

O valor do módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, E_{ci28} foi calculado de acordo com a eq. (1) do item 8.2.8 da NBR 6118 (2007). Na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal pode ser adotado um módulo de elasticidade único, à tração e à compressão.

Os valores de resistência característica à tração do aço da armadura das vigas e lajes em estudo são os nominais indicados na NBR 7480 (2007), resistência característica ao escoamento (f_{yk}) e o limite de resistência (f_{st}).

Com estes parâmetros de projeto as vigas e lajes da Tabela 35 foram dimensionadas com base na capacidade última ELU de acordo com a norma brasileira NBR 6118 (2007), item 10.3.

Para os estados limites de serviço ELS, além das verificações dos estados limites de formação e de abertura de fissuras, o estado limite de deformações excessivas foi verificado de acordo com o item 13.3 da NBR 6118 (2007).

Esta verificação utilizou os deslocamentos limites (valores práticos) do grupo “a” (aceitabilidade sensorial) estabelecidos na Tabela 20.

Tabela 35 - Resumo das informações gerais sobre as vigas e lajes

VIGA	Seção R ¹		Vão		Armadura		Carga	
	b (cm)	h (cm)	L (m)	L/h	As (cm ²)	A's (cm ²)	d' (cm)	Ps (kN)
VR1250S4	12	50	4,0	8	2,36	0,39	2,9	26,1
VR1750S5	17	50	5,0	10	3,14	0,39	3,0	25,4
VR2050S6	20	50	6,0	12	3,68	0,39	3,1	20,8
VR2550S7	25	50	7,0	14	3,93	0,39	3,0	17,2
VR2550S8	25	50	8,0	16	3,14	0,39	3,0	11,8
LR10025S5	100	25	5,0	20	16,49	1,18	3,1	22,5
LR10025S6	100	25	6,0	24	11,78	1,18	3,1	11,7
LR10025S7	100	25	7,5	30	6,28	1,18	3,1	1,2

1) R = Seção retangular;

2) d' = posição do centro de gravidade da armadura inferior.

7.3.2 Comparativo entre o modelo mecânico e o método simplificado da NBR 6118 (2007)

Com estas condições de projeto, o modelo mecânico implementado nesta tese foi comparado com o modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (ABNT 2007). Foram calculados os deslocamentos imediatos e os deslocamentos totais de longa duração. Neste estudo comparativo, apresentado neste item, não são usadas variáveis aleatórias, apenas valores determinísticos.

Os deslocamentos totais do modelo mecânico foram obtidos pela superposição das componentes dos deslocamentos imediatos e as componentes dos deslocamentos devidos à retração e à fluência. A análise foi feita com a história de carregamento composta por parcelas do carregamento acidental e do carregamento permanente, em combinações de ações de serviço quase permanentes, para a verificação do estado limite de deformações excessivas.

O modelo mecânico considera a deformação específica decorrente da retração e da fluência do concreto calculadas de acordo com o Anexo A da NBR 6118 (ABNT 2007). Este modelo, diferentemente do modelo simplificado da NBR 6118 (ABNT 2007) é dependente da umidade relativa do ambiente, do abatimento do concreto (*slump*) e do tipo de cimento.

A Tabela 36 apresenta os resultados da flecha imediata e de longa duração calculados com a avaliação simplificada do item 17.3.2.1 da

NBR 6118 (2007) e a Tabela 37 apresenta os resultados da flecha imediata e de longa duração calculados com o modelo mecânico e com a consideração da flecha adicional diferida devido à fluência de acordo com o Anexo A da NBR 6118 (2007). Nos resultados da Tabela 37 não foi considerado o acréscimo na flecha decorrente da retração, este acréscimo será considerado nos resultados apresentados na Tabela 38.

Estas tabelas também apresentam a relação entre os momentos de serviço e o momento de fissuração da seção crítica, a taxa de armadura tracionada, a relação entre a carga permanente e a carga total, a esbeltez da viga (L/h), o valor da carga de serviço aplicada na viga em dois pontos e a razão entre a flecha final e a flecha imediata.

O tempo t considerado para o cálculo da flecha diferida nos dois casos foi de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração (t_o) 28 dias.

Para estes resultados obtidos pelo modelo mecânico foram utilizados os seguintes parâmetros:

- Umidade relativa do ambiente: 75%
- Abatimento do concreto: 6
- Tipo de cimento: CP I – Cimento Tipo Portland

Tabela 36 – Flecha imediata e flecha total calculada com o modelo simplificado do item 17.3.2.1 da NBR6118 (2007)

VIGA	Ma/Mr	ρ (%)	$g/(g+q)$	f_{lim} (cm)	Flecha imediate (cm)	Flecha total (cm)	$1+\alpha_f$
VR1250S4	2,13	0,39	0,73	1,6	0,71	1,62	2,28
VR1750S5	1,90	0,37	0,70	2,0	0,84	1,92	2,29
VR2050S6	1,65	0,37	0,65	2,4	1,09	2,50	2,29
VR2550S7	1,57	0,31	0,63	2,8	1,25	2,89	2,31
VR2550S8	1,40	0,25	0,70	3,2	1,30	3,02	2,32
LR10025S5	1,28	0,66	0,73	2,0	0,86	1,97	2,29
LR10025S6	1,29	0,47	0,66	2,4	1,04	2,38	2,29
LR10025S7	1,17	0,25	0,95	3,0	1,31	3,00	2,29

1) f_{lim} = Flecha limite considerada como do grupo “a”, aceitabilidade sensorial.

Os resultados do modelo mecânico implementado apresentados na Tabela 37, com os resultados da flecha imediata e a flecha final com a consideração da flecha adicional diferida devido à fluência, e sem a consideração da deformação específica decorrentes da retração, serão

comparados com os resultados da Tabela 36 obtidos de acordo com modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007).

Este comparativo é apresentado na Tabela 39 e de modo geral indicam uma boa concordância entre os resultados calculados pelos dois modelos. As maiores diferenças ocorreram para as lajes LR10025S6 e LR10025S7 no cálculo das flechas imediatas.

Na Tabela 40 é apresentado um comparativo entre o modelo mecânico com a consideração da deformação específica decorrente da retração e o modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007).

Tabela 37 - Flecha imediata e flecha total; Modelo mecânico sem o efeito da retração.

VIGA	Ma/Mr	ρ (%)	$g/(g+q)$	f_{lim} (cm)	Flecha imediate (cm)	Flecha total (cm)	$1+\alpha_f$
VR1250S4	1,95	0,39	0,73	1,6	0,64	1,32	2,06
VR1750S5	1,89	0,37	0,66	2,0	0,91	1,89	2,08
VR2050S6	1,71	0,37	0,60	2,4	1,10	2,21	2,01
VR2550S7	1,57	0,31	0,63	2,8	1,13	2,89	2,56
VR2550S8	1,42	0,25	0,70	3,2	1,51	3,08	2,04
LR10025S5	2,13	0,28	0,73	2,0	0,72	1,85	2,57
LR10025S6	1,89	0,25	0,66	2,4	0,84	2,29	2,73
LR10025S7	1,17	0,25	0,95	3,0	1,02	3,23	3,17

Tabela 38 - Flecha imediata, retração e flecha total, com efeito da retração; Modelo mecânico.

VIGA	Ma/Mr	ρ (%)	$g/(g+q)$	f_{lim} (cm)	Flecha imediate (cm)	Flecha total (cm)	$1+\alpha_f$
VR1250S4	2,13	0,39	0,73	1,6	0,67	1,42	2,12
VR1750S5	1,89	0,37	0,66	2,0	0,97	1,94	2,00
VR2050S6	1,71	0,37	0,60	2,4	1,14	2,27	1,99
VR2550S7	1,57	0,31	0,63	2,8	1,20	2,96	2,47
VR2550S8	1,42	0,25	0,70	3,2	1,58	3,15	1,99
LR10025S5	2,13	0,28	0,73	2,0	0,84	1,97	2,35
LR10025S6	1,89	0,25	0,66	2,4	0,95	2,40	2,53
LR10025S7	1,15	0,25	0,95	3,0	1,11	3,32	2,99

Tabela 39 - Comparativo entre o modelo mecânico sem a retração e a NBR 6118(2007)

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)		
	Modelo s/retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118	Modelo s/retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118
VR1250S4	0,64	0,71	0,90	1,32	1,62	0,81
VR1750S5	0,91	0,84	1,08	1,89	1,92	0,98
VR2050S6	1,10	1,09	1,01	2,21	2,50	0,88
VR2550S7	1,13	1,25	0,90	2,89	2,89	1,00
VR2550S8	1,51	1,30	1,16	3,08	3,02	1,02
LR10025S5	0,72	0,86	0,84	1,85	1,97	0,94
LR10025S6	0,84	1,04	0,81	2,29	2,38	0,96
LR10025S7	1,02	1,31	0,78	3,23	3,00	1,08
Média			0,93			0,96
COV (%)			14,48			8,75

Tabela 40 - Comparativo modelo mecânico com a retração e a NBR 6118(2007)

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)		
	Modelo com retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118	Modelo com retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118
VR1250S4	0,67	0,71	0,94	1,42	1,62	0,88
VR1750S5	0,97	0,84	1,15	1,94	1,92	1,01
VR2050S6	1,14	1,09	1,05	2,27	2,50	0,91
VR2550S7	1,20	1,25	0,96	2,96	2,89	1,02
VR2550S8	1,58	1,30	1,22	3,15	3,02	1,04
LR10025S5	0,84	0,86	0,98	1,97	1,97	1,00
LR10025S6	0,95	1,04	0,91	2,40	2,38	1,01
LR10025S7	1,11	1,31	0,85	3,32	3,00	1,11
Média			1,01			0,99
COV (%)			12,39			7,26

Estes resultados mostram, de modo geral, uma boa concordância entre os resultados calculados pelos dois modelos, mas uma melhor

concordância entre os resultados para a flecha total, com a razão entre os resultados do modelo mecânico e os da NBR 6118 com uma média de 0,99 e um coeficiente de variação de 7,26 %. As maiores diferenças, apresentadas nas lajes, podem ser atribuídas à variação na rigidez devido à fissuração e a taxa de armadura.

Os resultados parecem indicar como já foi mencionado no item 5.3.3, que o modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007) além de levar em consideração a fluência, considera também a retração.

Os parâmetros de umidade relativa do ambiente, do abatimento do concreto (*slump*) e do tipo de cimento são os mesmos da análise anterior.

7.3.3 Comparativo entre o modelo mecânico com variáveis aleatórias e o método simplificado da NBR 6118 (2007)

Com as mesmas condições de projeto para as vigas da Tabela 35, foram calculados os deslocamentos médios imediatos e os deslocamentos totais de longa duração.

No estudo comparativo, apresentado neste item, são usadas variáveis aleatórias, calculadas de acordo com a Tabela 33, e apresentadas nas Tabela 41 e Tabela 42.

Cada caso foi simulado com uma amostra de 1000 valores para os casos de carregamento de curta e longa duração, com um tempo t considerado para o cálculo da flecha diferida de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração t_0 de 28 dias.

Tabela 41 - Variáveis aleatórias das vigas e lajes VR e LR

VIGA	Seção R ¹		Vão	Armadura		
	b (cm)	h (cm)		As (cm ²)	A's (cm ²)	d' (cm)
VR1250S4	12,4	50,16	4,04	2,34	0,39	3,06
VR1750S5	17,4	50,16	5,04	3,11	0,39	3,16
VR2050S6	20,4	50,16	6,04	3,64	0,39	3,26
VR2550S7	25,4	50,16	7,04	3,89	0,39	3,16
VR2550S8	25,4	50,16	8,04	3,11	0,39	3,16
LR10025S5	100,4	25,16	5,04	16,33	1,17	3,26
LR10025S6	100,4	25,16	6,04	11,66	1,17	3,26
LR10025S7	100,4	25,16	7,54	6,22	1,17	3,26

1) R = Seção retangular;

Tabela 42 - Variáveis aleatórias das vigas e lajes VR e LR

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	31,6 MPa	0,176	Normal
f_{ctm}	2,56 MPa	0,218	Normal
E_{ci}	28000 MPa	0,119	Normal
f_y	545MPa	0,050	Normal
E_s	210000 MPa	0,050	Normal
U_r	75%	0,15	Normal truncada
G^1	1,05 x 1,0 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,3 x 1.5 kN/m ²	0,60	Gamma

1) G = carga permanente, $G_{nom} = 1,0 \text{ kN/m}^2$ 2) Q = carga accidental quase permanente, $Q_{nom} = 1.5 \text{ kN/m}^2$

A Tabela 43 apresenta os resultados dos valores médios, desvio padrão e coeficiente de variação (COV) da flecha imediata e de longa duração com a consideração da flecha adicional diferida devido à fluência e à consideração da deformação específica decorrentes da retração de acordo com o Anexo A da NBR 6118 (2007) e os valores calculados com o modelo mecânico.

Estes resultados serão comparados com os resultados da Tabela 36 obtidos de acordo com modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007).

Tabela 43 – Resultados da simulação de Monte Carlo para flecha imediata, retração e flecha total, com efeito da retração.

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)			$1+\alpha_f$
	Média ¹	S_d	COV	Média ¹	S_d	COV	
VR1250S4	0,66	0,20	0,30	1,36	0,41	0,30	2,06
VR1750S5	0,91	0,32	0,35	1,83	0,62	0,34	2,01
VR2050S6	0,97	0,45	0,47	2,10	0,82	0,39	2,16
VR2550S7	1,07	0,64	0,60	2,41	1,08	0,45	2,25
VR2550S8	1,52	0,91	0,60	3,29	1,47	0,45	2,16
LR10025S5	0,75	0,28	0,37	1,85	0,51	0,28	2,47
LR10025S6	1,09	0,63	0,57	2,88	1,10	0,38	2,64
LR10025S7	1,83	1,18	0,63	4,36	1,93	0,44	2,38

1) Média das simulações com o modelo mecânico.

Este comparativo é apresentado na Tabela 44 e de modo geral indicam uma boa concordância entre os resultados calculados pelos dois modelos, com a razão entre os resultados do modelo mecânico e os da NBR 6118 para a flecha total com uma média de 1,11 e um coeficiente de variação de 18,71 %.

Tabela 44 - Flecha imediata, e flecha total, com efeito da retração; comparativo entre a simulação e a NBR 6118.

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)		
	Média	NBR 6118	Simulação /NBR6118	Média	NBR 6118	Simulação/ NBR6118
VR1250S4	0,66	0,71	0,93	1,36	1,62	0,84
VR1750S5	0,91	0,84	1,08	1,83	1,92	0,95
VR2050S6	0,96	1,09	1,17	2,10	2,50	1,00
VR2550S7	1,07	1,25	1,26	2,41	2,89	1,12
VR2550S8	1,52	1,30	1,54	3,29	3,02	1,34
LR10025S5	0,75	0,86	0,98	1,85	1,97	0,99
LR10025S6	1,09	1,04	1,05	2,88	2,38	1,21
LR10025S7	1,83	1,31	1,39	4,36	3,00	1,45
Média			1,17			1,11
COV (%)			17,89			18,71

É importante destacar que os valores médios são resultados de simulações com os valores médios das variáveis aleatórias apresentados na Tabela 33. Algumas destas variáveis, como as dimensões das vigas, posição do centro de gravidade da armadura inferior e as cargas permanentes, são superiores aos valores nominais adotados no projeto. Os valores médios das áreas das armaduras, por sua vez, são inferiores aos valores nominais. A tendência é de que os valores médios das flechas imediatas e de longa duração sejam inferiores aos valores de projeto, calculados pelo procedimento simplificado da NBR 6118 (2007).

7.3.4 Análise do efeito de parâmetros de projeto na variabilidade dos deslocamentos

Foram realizados estudos com as vigas e lajes da Tabela 35 para verificar os efeitos de determinados parâmetros de projeto na variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes dimensionadas com

base no estado limite último (ELU) e no estado limite de serviço (ELS) da NBR 6118 (2007).

Os parâmetros de projeto considerados são os seguintes:

- 1) Esbeltez ou relação do vão e a altura da seção transversal (L/h).
- 2) Razão entre o momento fletor na seção crítica e o momento de fissuração da viga ou laje (M_f/M_r).
- 3) Taxa da armadura de flexão, armadura inferior tracionada (ρ).

A Figura 96 mostra o efeito da esbeltez no coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos imediatos das vigas e lajes. A tendência é de um aumento do COV com o aumento da esbeltez. A Figura 97 mostra o mesmo efeito para os deslocamentos totais. Pode-se observar que a variação do COV é menor para as flechas totais.

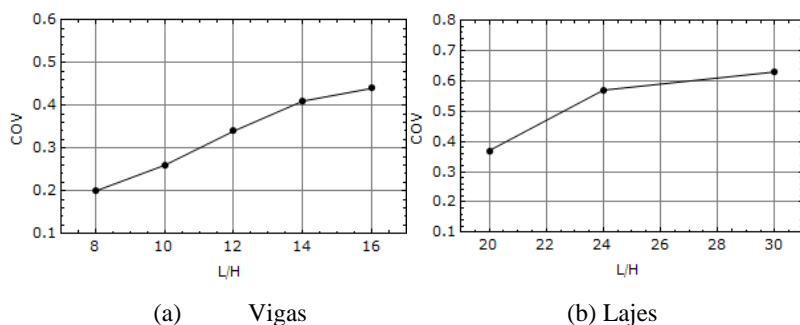


Figura 96 - Efeito da esbeltez (vão/altura) no coeficiente de variação (COV), para flechas imediatas.

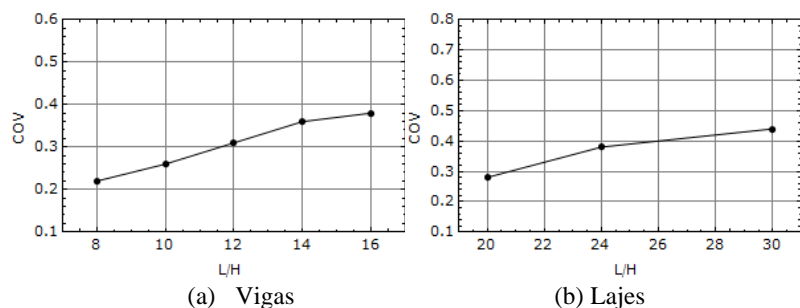


Figura 97 - Efeito da esbeltez (vão/altura) no coeficiente de variação (COV), para flechas totais.

A Figura 98 mostra o efeito da razão entre o momento fletor na seção crítica e o momento de fissuração da viga ou laje (M_f/M_r). A tendência é de uma redução do COV com o aumento da razão M_f/M_r . Para analisar uma tendência mais ampla, foram calculados valores de COV para razões de M_f/M_r entre 0,5 e 1,5.

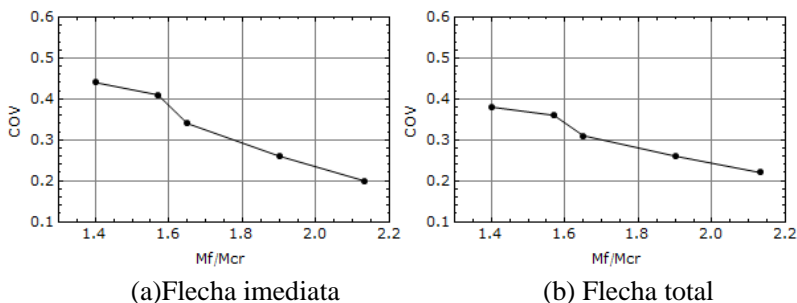


Figura 98 - Efeito da relação M_f/M_r no coeficiente de variação (COV) para flechas imediatas e totais, para vigas.

Os resultados demonstram que existe uma tendência do coeficiente de variação (COV) aumentar à medida que a razão M_f/M_r aumenta, para um valor próximo da unidade, e confirma a mesma tendência de redução do COV, quando a razão M_f/M_r aumenta depois de passar por este valor crítico.

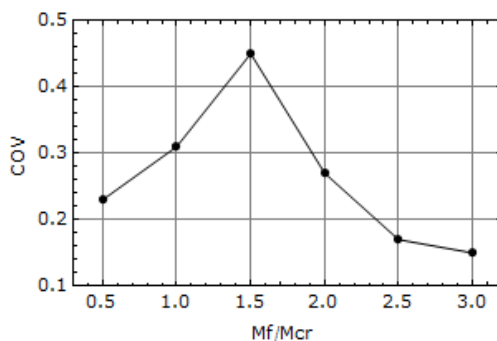


Figura 99 - Efeito da relação M_f/M_r no coeficiente de variação (COV) para flechas imediatas.

A Figura 100 mostra o efeito da taxa de armadura de flexão no coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos imediatos e totais das

vigas e lajes. A tendência é de uma redução do COV com o aumento da taxa de armadura (ρ). A armadura considerada neste caso é a armadura de flexão, longitudinal inferior.

Esta tendência tem uma relação com o efeito da razão de M_f/M_r , pois taxas de armaduras maiores são necessárias para momentos fletores de serviço mais elevados, e momentos fletores mais elevados aumentam a probabilidade de formação de fissuras.

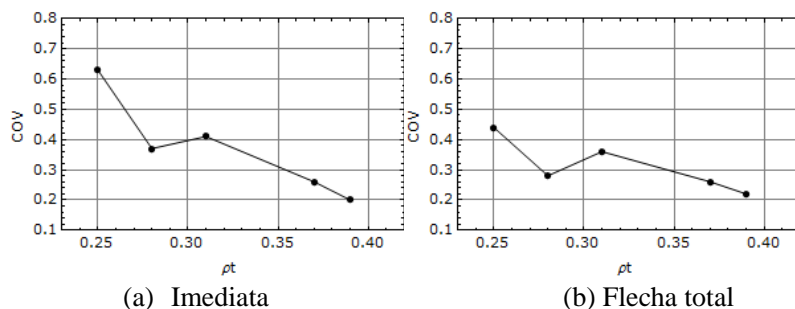


Figura 100 - Efeito da taxa de armadura no coeficiente de variação (COV) para flechas imediata e total, para vigas e lajes.

Os resultados dos estudos sobre os efeitos de parâmetros de projeto na variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes, dimensionadas com base no estado limite último (ELU) e no estado limite de serviço (ELS) da NBR 6118 (2007), confirmaram as tendências reportadas por Sbarounis (1984), Jokinen e Scanlon (1984), Mirza e McGregor (1995), Rosowsky, Stewart e Khor (2000) e Choi, Scanlon e Johnson (2004).

Os estudos destes autores indicaram que a variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes de concreto armado depende basicamente da razão entre o momento fletor na seção crítica e o momento de fissuração da viga ou laje (M_f/M_r). Os valores mais elevados de COV estão na faixa de razões M_f/M_r próximas da unidade. Neste estudo encontraram-se valores de COV bem elevados, superiores a 60% (0,6) para lajes com valores de M_f/M_r próximos da unidade.

Este resultado pode ser explicado pelo fato de que em seções onde o valor do momento fletor estiver próximo do valor do momento de fissuração da viga ou laje a incerteza relacionada com a fissuração é maior.

Além disso, é provável que vigas ou lajes que se encontram nesta situação tenham taxas baixas de armaduras e que a rigidez depende bastante do efeito de *tension stiffening*. Este efeito depende basicamente do concreto tracionado entre as fissuras e possui uma variabilidade elevada devido à variabilidade da resistência do concreto a tração.

Os resultados deste estudo também confirmaram a tendência do coeficiente de variação (COV) diminuir com o deslocamento diferido devido à fluência. Na maioria dos casos estudados foi verificado que o desvio padrão (S_d) aumenta com o carregamento de longa duração.

O desvio padrão dos deslocamentos totais geralmente é superior ao desvio padrão dos deslocamentos imediatos e como o valor médio dos deslocamentos aumenta devido ao carregamento sustentado, pode-se observar que o coeficiente de variação (COV) de fato diminui, já que o COV é a relação entre o desvio padrão e o valor médio.

A fissuração também aumenta com o aumento dos deslocamentos e este efeito contribui com o aumento dos deslocamentos médios e com a redução da variabilidade.

7.3.5 Análise do efeito da umidade relativa do ambiente na variabilidade dos deslocamentos

As simulações com as vigas e lajes da Tabela 35 também foram analisadas com um valor diferente da umidade relativa do ambiente (U_r) para verificar o efeito deste parâmetro na variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes, dimensionadas com base no estado limite último (ELU) e no estado limite de serviço (ELS) da NBR 6118 (2007).

A Tabela 45 apresenta os resultados da flecha imediata e de longa duração com a consideração da flecha adicional diferida devido à fluência e à consideração da deformação específica decorrente da retração de acordo com o Anexo A da NBR 6118 (ABNT 2007). Os valores foram calculados para uma umidade relativa do ambiente $U_r = 60\%$.

Tabela 45 - Flecha imediata, retração e flecha total, com efeito da retração; Modelo mecânico com umidade relativa $U_r = 60\%$.

VIGA	Ma/Mcr	ρ (%)	$g/(g+q)$	Flecha imediate (cm)	Flecha total (cm)	$1+\alpha_f$
VR1250S4	2,13	0,39	0,73	0,79	1,70	2,15
VR1750S5	1,89	0,37	0,66	1,09	2,21	2,03
VR2050S6	1,71	0,37	0,60	1,27	2,53	1,99
VR2550S7	1,57	0,31	0,63	1,52	2,99	1,97
VR2550S8	1,42	0,25	0,70	2,20	4,15	1,89
LR10025S5	2,13	0,28	0,73	0,81	2,25	2,78
LR10025S6	1,89	0,25	0,66	0,85	2,69	3,16
LR10025S7	1,15	0,25	0,95	1,25	3,78	3,02

Tabela 46 - Comparativo modelo mecânico ($U_r = 60\%$) com a retração e a NBR 6118 (2007).

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)		
	Modelo com retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118	Modelo com retração	NBR 6118	Modelo/ NBR6118
VR1250S4	0,79	0,71	1,11	1,70	1,62	1,05
VR1750S5	1,09	0,84	1,30	2,21	1,92	1,15
VR2050S6	1,27	1,09	1,17	2,53	2,50	1,01
VR2550S7	1,52	1,25	1,22	2,99	2,89	1,03
VR2550S8	2,20	1,30	1,69	4,15	3,02	1,37
LR10025S5	0,81	0,86	0,94	2,25	1,97	1,14
LR10025S6	0,85	1,04	0,82	2,69	2,38	1,13
LR10025S7	1,25	1,31	0,95	3,78	3,00	1,26
Média			1,15			1,14
COV (%)			23,56			10,70

A Tabela 47 apresenta os resultados dos valores médios, desvio padrão e coeficiente de variação (COV) da flecha imediata e de longa duração com a consideração da flecha adicional diferida devido à fluência e à consideração da deformação específica decorrentes da

retração de acordo com o Anexo A da NBR 6118 (2007). Estes valores foram calculados com uma umidade relativa do ambiente de 60%.

Pode-se observar como era esperado que os valores dos deslocamentos totais devido ao acréscimo dos deslocamentos diferidos são superiores aos valores obtidos com uma umidade relativa do ambiente $U_r = 75 \%$.

Tabela 47 - Resultados da simulação de Monte Carlo para flecha imediata, retração e flecha total, com efeito da retração.

VIGA	Flecha Imediata (cm)			Flecha total (cm)			$1+\alpha_f$
	Média	S_d	COV	Média	S_d	COV	
VR1250S4	0,79	0,08	0,10	1,62	0,20	0,12	2,05
VR1750S5	1,11	0,13	0,11	2,13	0,27	0,13	1,92
VR2050S6	1,27	0,18	0,14	2,56	0,38	0,15	2,01
VR2550S7	1,52	0,29	0,19	3,02	0,53	0,18	1,98
VR2550S8	2,09	0,46	0,22	4,08	0,81	0,20	1,95
LR10025S5	0,96	0,42	0,44	2,39	0,95	0,40	2,49
LR10025S6	1,09	0,63	0,57	2,88	1,10	0,38	2,64
LR10025S7	1,35	0,16	0,33	4,13	1,19	0,29	3,05

1) Modelo mecânico/NBR 6118 (2007): Média = 1,20 e COV (%) = 15,68

2) Modelo mecânico/NBR 6118 (2007): Média = 1,16 e COV (%) = 12,48

7.3.6 Análise do efeito da consistência do concreto no lançamento (slump).

A retração do concreto e a fluência dependem da consistência do concreto no lançamento. Valores de abatimento do concreto no lançamento afetam os valores dos coeficientes ϕ_{1c} e o coeficiente de retração ε_{1s} . Conforme a NBR 6118 (2007), os valores de ϕ_{1c} e ε_{1s} para $U_r < 90\%$ e abatimento (*slump*) entre 0 cm e 4 cm são 25 % menores e para abatimentos entre 10 cm e 15 cm são 25 % maiores.

Os resultados das distribuições de probabilidades PDF mostradas na Figura 101 são relativos às flechas de longa duração com a idade de 8 anos calculados com a viga VR2040S6 mostrada na Tabela 48, para valores de “slump” (0-4 cm), “slump” (5-9 cm) e, “slump” (10-15 cm) e para umidades relativas do ambiente $U_r = 40 \%$ e $U_r = 80 \%$.

Estes resultados indicam que o valor da consistência do concreto no lançamento afetaram significativamente os valores médios dos deslocamentos totais da viga analisada.

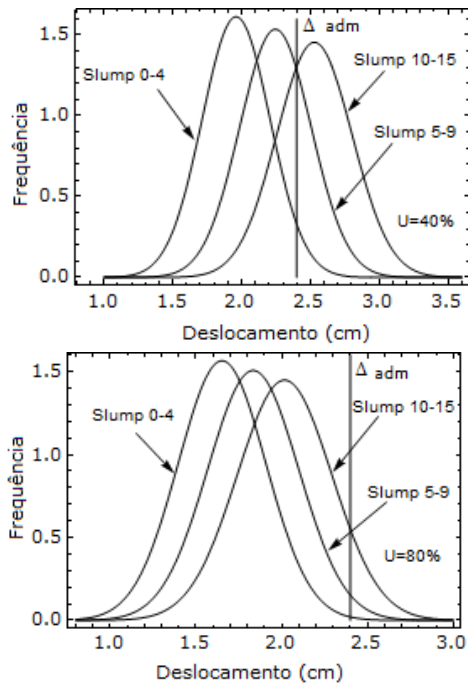


Figura 101 - Efeito da consistência do concreto na variabilidade dos deslocamentos, para umidades relativas $U_r = 40\%$ e $U_r = 80\%$.

Tabela 48 – Média e COV; Flecha total, com efeito da retração para a VR2040S6.

		Deslocamento total (cm)			
		$U_r = 40\%$		$U_r = 80\%$	
“Slump” (cm)	PDF	Média	COV	Média	COV
0-4	Normal	1,96	0,13	1,65	0,16
5-9	Normal	2,24	0,12	1,83	0,15
10-15	Normal	2,37	0,11	2,01	0,14

A viga VR2040S6, com as dimensões mostradas na Figura 102 e com as variáveis aleatórias apresentados na Tabela 49, foi dimensionada de acordo com NBR 6118 (2007) para umidades relativas do ambiente $U_r = 40\%$ e $U_r = 80\%$.

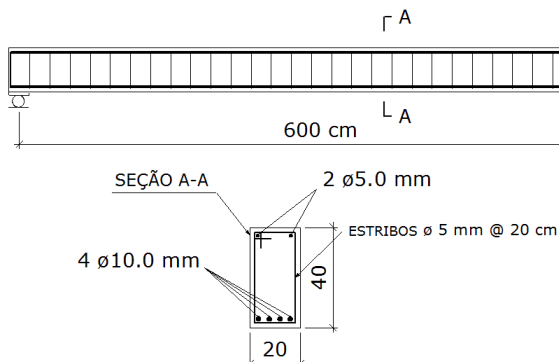


Figura 102 – Viga VR2040S6 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007)

Tabela 49 - Variáveis aleatórias da viga VR2040S6.

Variável	Valor médio	COV	PDF
f'_c	27.7 MPa	0.176	Normal
f_{ctm}	2.13 MPa	0.218	Normal
E_{ci}	28000 MPa	0.119	Normal
A_{sinf}	3,11 cm ²	0,024	Normal truncada
A_{ssup}	0,38 cm ²	0.024	Normal truncada
f_y	545 MPa	0.050	Normal
E_s	210000 MPa	0.050	Normal
d'	3,16 cm	0.045	Normal
b	20,4 cm	0.045	Normal
h	40,16 cm	0.045	Normal
l_o	600,4 cm	0.002	Normal
U_r	U_{mom}	0,15	Normal truncada

7.4 Análise estatística dos deslocamentos

As características probabilísticas de um fenômeno aleatório geralmente são difíceis de determinar e o melhor modelo de probabilidade precisa descrever adequadamente estas características.

O processo físico em muitos casos é o resultado de uma soma de inúmeros efeitos individuais, e nestes casos a distribuição normal poderá ser escolhida. Em certos casos a distribuição de probabilidades é

determinada somente a partir do diagrama de frequência dos dados existentes, o modelo de distribuição procurado poderá então ser determinado visualmente comparando-se com as funções densidade conhecidas. Testes estatísticos podem ser executados para verificar a função de probabilidade adotada e definir qual distribuição é a melhor alternativa. Neste trabalho será usado o gráfico *quantil-quantil plot* ou *Q-Q* mostrado no item 7.2.1.

Para analisar as características probabilísticas das vigas e lajes do estudo paramétrico, foram calculados a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos para diversas idades, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos. O cálculo dos deslocamentos foi feito para o instante de remoção do escoramento e início da aplicação das cargas permanentes e acidentais aos 28 dias. O período de referência de 50 anos será usado para determinar os valores da média, desvio padrão e o coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos de longa duração.

7.4.1 Análise dos deslocamentos das lajes

7.4.1.1 Laje LR10025S5

Para a análise da laje LR10025S5, foram usados os parâmetros da Tabela 34 e os da Tabela 35, com base nas variáveis aleatórias da Tabela 31. Os parâmetros de meio ambiente e do concreto adotados para esta simulação foram os seguintes:

- Umidade relativa do ambiente: 60%
- Abatimento do concreto: 6
- Tipo de cimento: CPI – Cimento Tipo Portland

Na Figura 103 é apresentado o diagrama carga-deslocamento das flechas imediatas até o nível de carga igual a 25 kN. Este resultado foi obtido com uma simulação de Monte Carlo em uma amostra de 1000 valores da laje LR10025S5. No mesmo gráfico é o mostrado o resultado para os valores médios, com e sem a consideração da retração.

Na

Figura 104 é apresentado o histograma da distribuição das flechas imediatas desta laje para o nível de carga de serviço P_s igual a 19 kN, esta figura mostra que a maioria dos resultados está agrupada em torno do valor médio, igual a 0,96 cm. Uma quantidade significativa de valores está espalhado acima da média.

O coeficiente de variação (COV) igual a 0,44 desta distribuição é bastante elevado, indicando uma grande variabilidade das flechas imediatas para lajes de concreto com o momento fletor de serviço (M_a) próximo do momento de fissuração (M_r) do elemento.

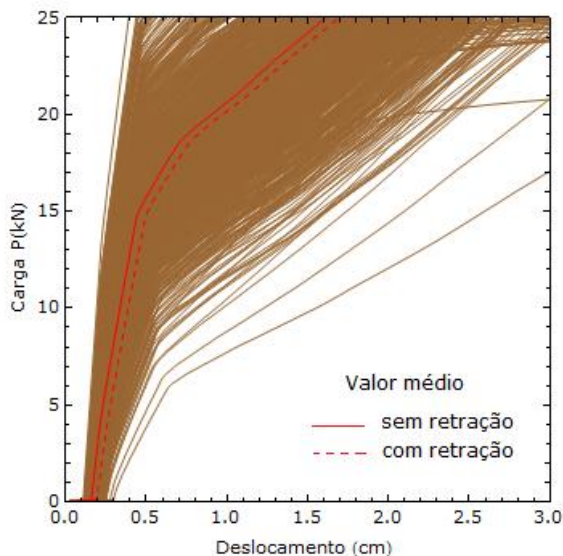


Figura 103 - Diagrama carga-deslocamento, resultado da simulação de Monte Carlo para uma amostra de 1000 valores da LR10025S5.

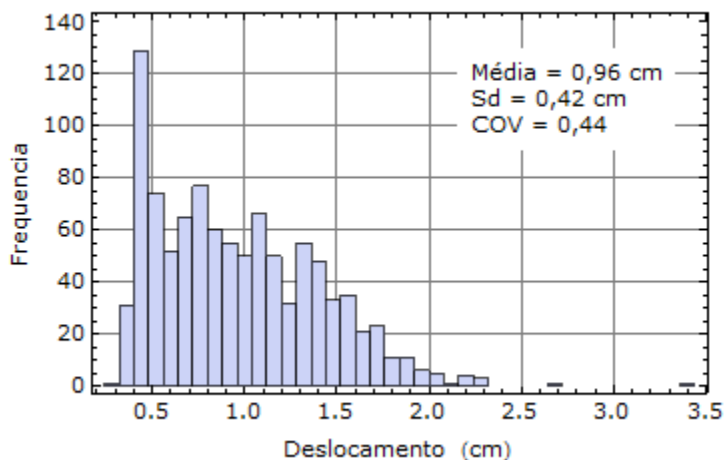


Figura 104 - Histograma das flechas imediatas da laje LR10025S5.

A Figura 105 apresenta o histograma da distribuição das flechas totais ou de longa duração. O tempo t considerado para o cálculo da

flecha diferida para a LR10025S5 foi de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração t_o foi 28 dias.

O histograma mostra que a maioria dos resultados está agrupada em torno do valor médio, igual a 2,39 cm. Um número significativo de valores está espalhado acima da média. O desvio padrão igual a 0,95 cm e o coeficiente de variação (COV) igual a 0,4 desta distribuição são bastante elevados, indicando uma grande variabilidade das flechas totais para lajes de concreto com o momento fletor de serviço (M_a) próximo do momento de fissuração (M_r) do elemento.

Pode-se observar que o desvio padrão aumentou de 0,42 cm para 0,95 cm, um acréscimo de 126%, enquanto o coeficiente de variação reduziu-se de 0,44 para 0,4 devido ao aumento significativo da média dos deslocamentos. A razão entre o valor da flecha final e a flecha imediata (2,39/0,96 cm) é de 2,49, bem próxima do valor 2,53 obtido com o coeficiente $(1+\alpha_f)$ modelo simplificado do item 17.3.2 da NBR 6118 (2007).

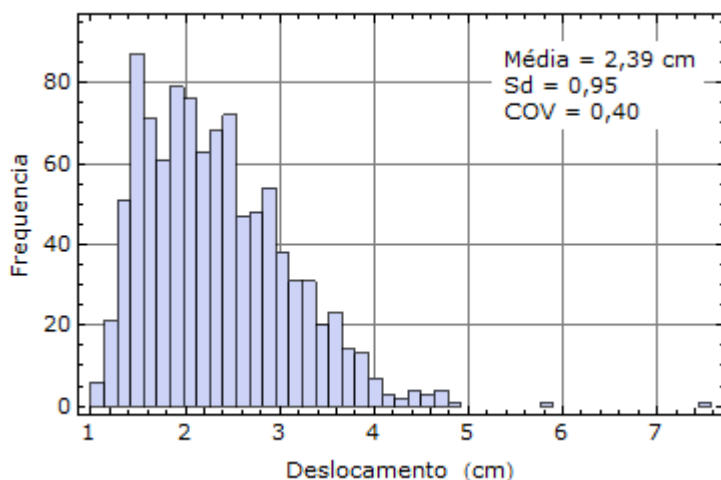


Figura 105 - Histograma das flechas totais da LR10025S5.

Figura 104 e a Figura 105 indicam que a distribuição de probabilidade para as flechas imediatas e totais desta laje não é simétrica, e que uma distribuição normal não poderá representar esta distribuição.

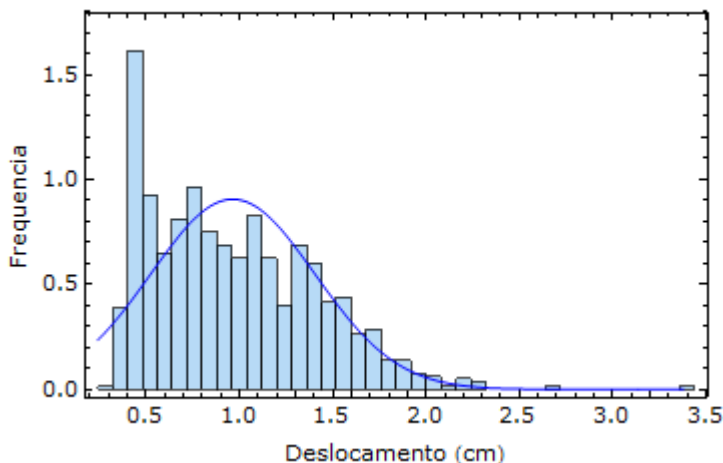
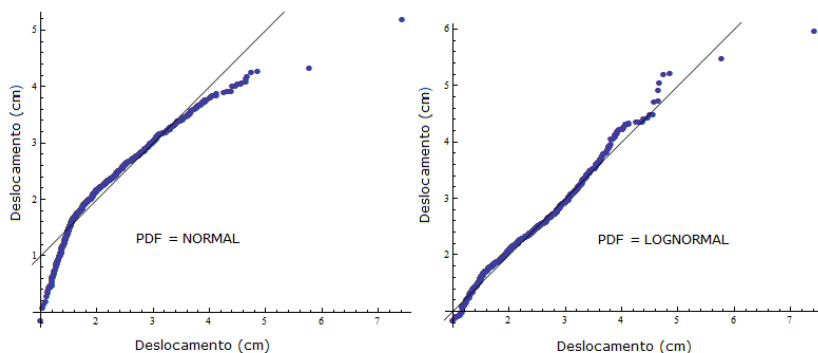


Figura 106 – Histograma das flechas imediatas, e com uma PDF Normal para a laje LR10025S5.

Na Figura 107 as frequências acumuladas de uma distribuição normal e de uma distribuição Lognormal com a mesma média e desvio padrão da distribuição dos deslocamentos da laje LR10025S5 é plotado em um gráfico $Q-Q$.



(a) Distribuição normal

(b) Distribuição Lognormal

Figura 107 - Gráficos $Q-Q$, deslocamentos de longa duração, para distribuição normal e para LogNormal da LR10025S5.

A linha diagonal plotada na Figura 107 (a) representa a hipótese de distribuição normal a ser testada e Figura 107 (b) a hipótese de

distribuição Lognormal. Neste caso pode-se observar que a distribuição Lognormal dos dados pode ser considerada a mais adequada como uma primeira aproximação.

A Figura 108 apresenta o histograma dos deslocamentos da distribuição das flechas imediatas da laje LR10025S5 em conjunto com uma distribuição Lognormal com a mesma média e desvio padrão desta distribuição.

A PDF da variável Lognormal foi calculada com:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2} \quad (195)$$

Com a média e o desvio da distribuição dos deslocamentos das flechas imediatas da laje LR10025S5, $\mu_x = 0,96$ cm e $\sigma_x = 0,42$ cm, respectivamente, aos parâmetros ξ e λ (desvio padrão e média) da distribuição Lognormal foram calculados com as expressões:

$$\xi^2 = \sigma_{\ln x}^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x} \right)^2 \right] \quad (196)$$

$$\lambda = \mu_{\ln x} = \ln(\mu_x) - \frac{1}{2}\xi^2 \quad (197)$$

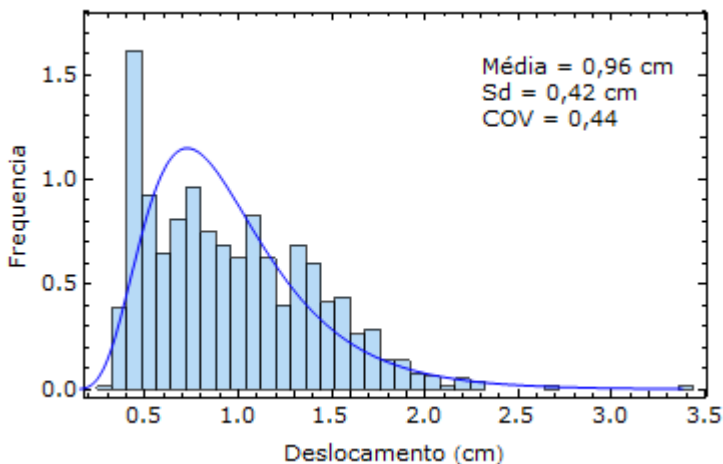


Figura 108 – Histograma das flechas imediatas com uma PDF Lognormal, laje LR10025S5.

A Figura 109 e a Figura 110 indicam que a distribuição de probabilidade para as flechas imediatas e totais desta laje não é simétrica, e que uma distribuição Lognormal pode representar as distribuições de flechas imediatas e flechas totais desta laje.

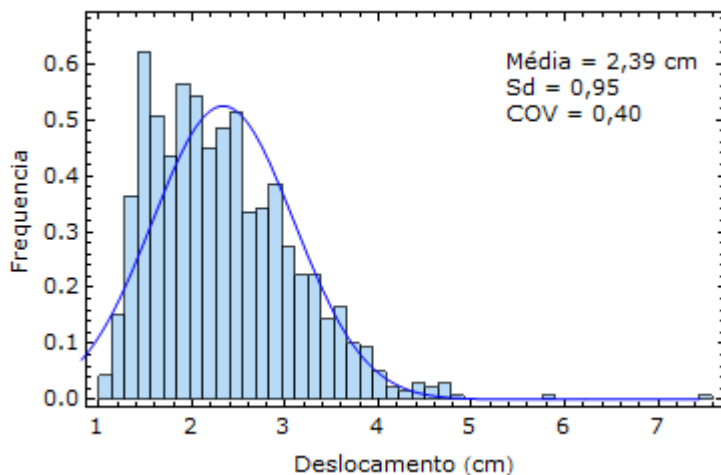


Figura 109–Histograma das flechas totais com uma PDF normal, laje LR10025S5.

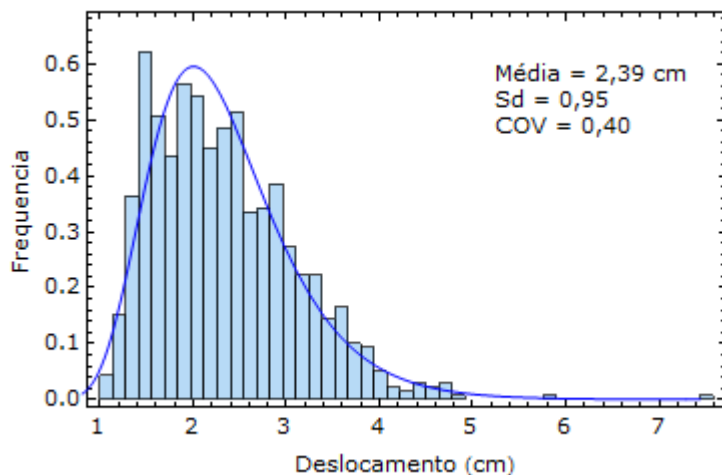


Figura 110–Histograma das flechas totais com uma PDF Lognormal, laje LR10025S5.

7.4.1.2 Laje LR10025S7

Uma simulação de Monte Carlo com uma amostra de 1000 valores foi feita para a laje LR10025S7. Foram usados os parâmetros da Tabela 34 e da Tabela 35 e com base nas variáveis aleatórias da Tabela 31.

Os parâmetros de meio ambiente e do concreto adotados para esta simulação foram os seguintes:

- 1) Umidade relativa do ambiente: 60%
- 2) Abatimento do concreto: 6 cm
- 3) Tipo de cimento: CP I – Cimento Tipo Portland

A Figura 111 apresenta o histograma da distribuição das flechas totais ou de longa duração. O tempo t considerado para o cálculo da flecha diferida para a LR10025S7 foi de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração t_0 foi 28 dias.

O coeficiente de variação (COV) igual a 0,33 desta distribuição é bastante elevado, indicando uma grande variabilidade das flechas imediatas para lajes de concreto com o momento fletor de serviço (M_a) próximo do momento de fissuração (M_r) do elemento.

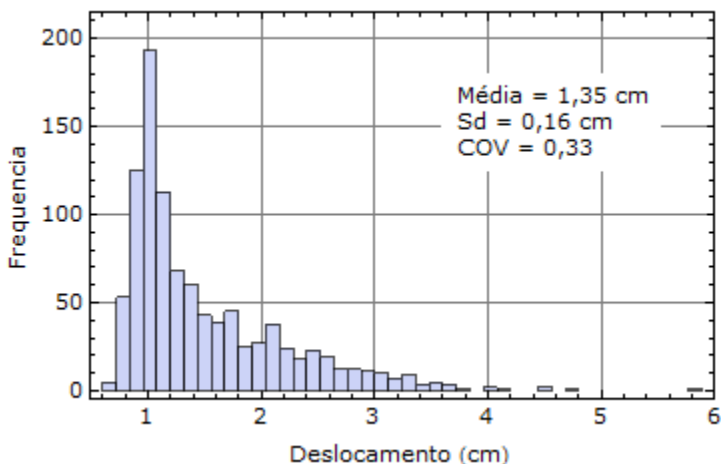


Figura 111 - Histograma das flechas imediatas da laje LR10025S7.

A Figura 112 apresenta o histograma da distribuição das flechas totais ou de longa duração. O tempo t considerado para o cálculo da flecha diferida para a LR10025S7 foi de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração t_0 foi 28 dias.

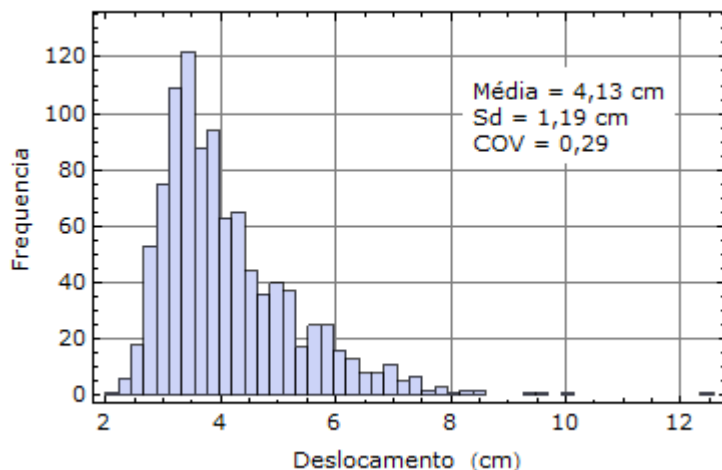


Figura 112 - Histograma das flechas totais da laje LR10025S7.

Pode-se observar que o desvio padrão aumentou de 0,16 cm para 1,19 cm, 7,44 vezes maior, enquanto o coeficiente de variação reduziu-se de 0,33 para 0,29 devido ao aumento significativo da média dos deslocamentos.

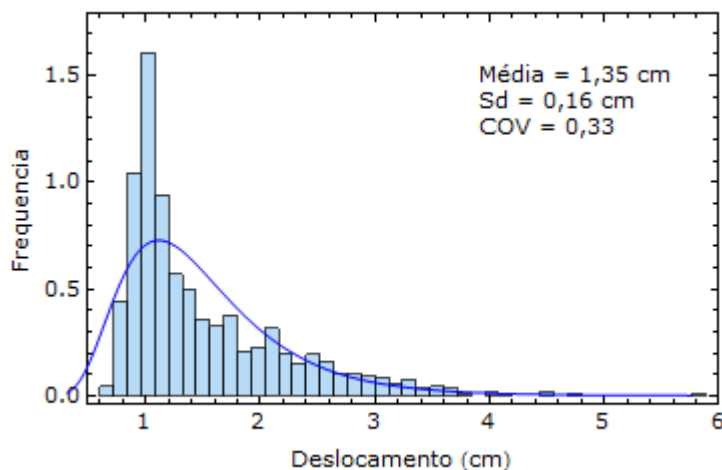


Figura 113 - Histograma das flechas imediatas com uma PDF Lognormal da laje LR10025S7.

A Figura 113 e a Figura 114 apresentam os histogramas dos deslocamentos das distribuições das flechas imediatas e totais para a LR10025S7, em conjunto com uma distribuição Lognormal com a mesma média e desvio padrão desta distribuição.

O histograma mostra que a maioria dos resultados está agrupada em torno do valor médio, igual a 4,13 cm. Um número significativo de valores está espalhado acima da média. O desvio padrão igual a 1,19 cm e o coeficiente de variação (COV) igual a 0,29 desta distribuição são bastante elevados, indicando também uma grande variabilidade das flechas totais para lajes de concreto com o momento fletor de serviço (M_d) próximo do momento de fissuração (M_f) do elemento.

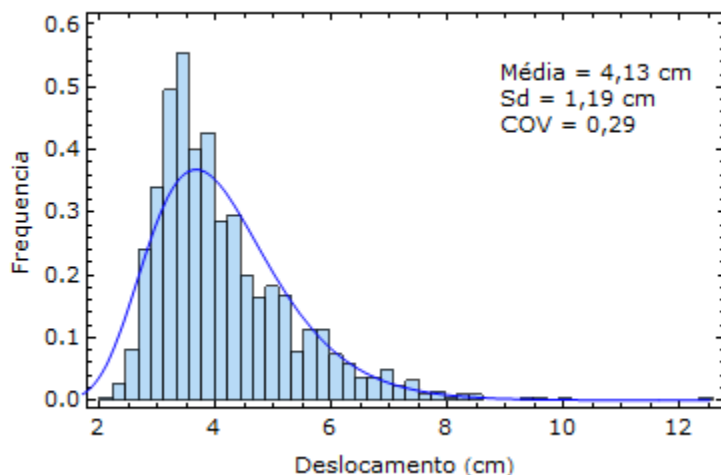


Figura 114 - Histograma das flechas totais com uma PDF Lognormal da laje LR10025S7.

7.4.2 Análise dos deslocamentos das vigas

A Figura 115 apresenta o diagrama carga-deslocamento das flechas imediatas para a simulação de Monte Carlo com uma amostra de 1000 valores da viga VR1750S5. Foram usados os parâmetros da Tabela 34 e da Tabela 35 e com base nas variáveis aleatórias da Tabela 31.

Os parâmetros de meio ambiente e do concreto adotados para esta simulação foram os seguintes:

- 1) Umidade relativa do ambiente: 60%
- 2) Abatimento do concreto: 6
- 3) Tipo de cimento: CP I – Cimento Tipo Portland

No gráfico estão destacados os diagramas carga-deslocamento calculados com os valores médios dos parâmetros de projeto da viga VR1750S5 e com a consideração da retração do concreto com e sem retração. O coeficiente de variação (COV) igual a 0,44 desta distribuição é bastante elevado, indicando uma grande variabilidade das flechas imediatas para vigas de concreto com o momento fletor de serviço (M_f) próximo do momento de fissuração (M_r) do elemento.

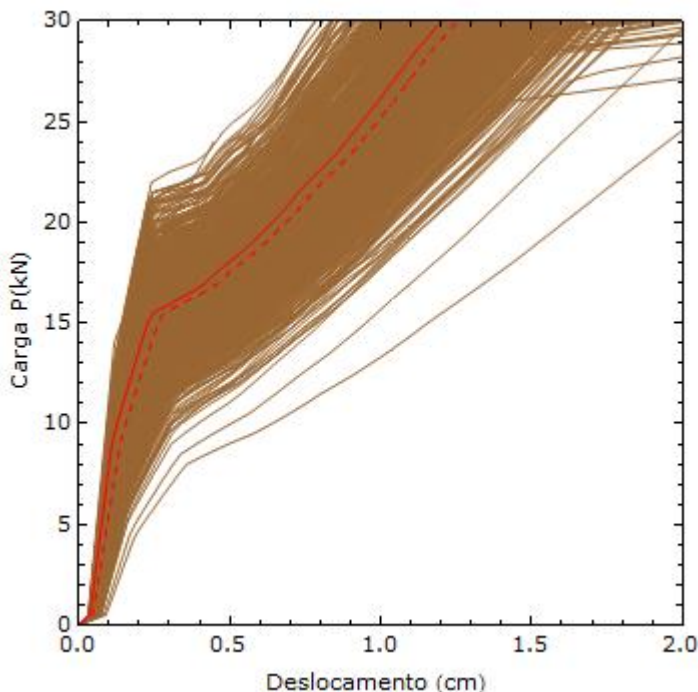


Figura 115 - Diagrama carga – deslocamento, resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5.

A Figura 116 apresenta o histograma da distribuição das flechas totais ou de longa duração. O tempo t considerado para o cálculo da flecha diferida para a VR1750S5 foi de 50 anos e a idade relativa à data de aplicação da carga de longa duração t_0 foi 28 dias.

O histograma mostra que a maioria dos resultados está agrupada em torno do valor médio, igual a 1,11 cm. Um número significativo de valores está espalhado acima e abaixo da média.

O desvio padrão igual a 0,13 cm e o coeficiente de variação (COV) igual a 0,11 desta distribuição não são elevados, indicando uma

menor variabilidade das flechas totais para vigas de concreto com o momento fletor de serviço (M_f) com valores superiores ao momento de fissuração (M_r) do elemento. Pode-se observar que o desvio padrão aumentou de 0,13 cm para 0,27cm, um acréscimo de 100%, enquanto o coeficiente de variação aumentou de 0,11 para 0,13.

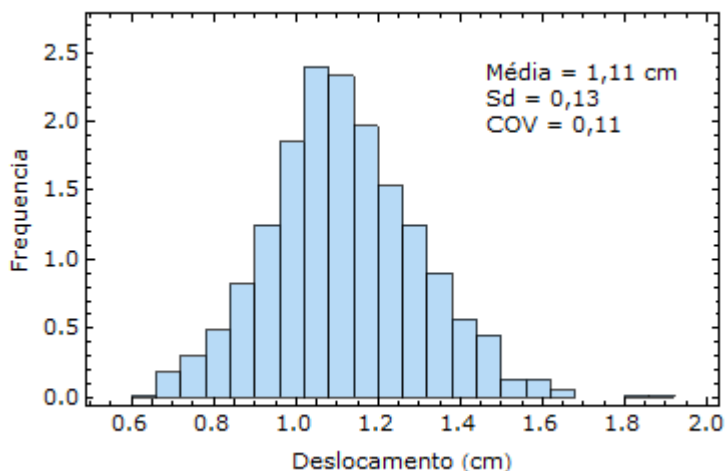


Figura 116 - Histograma flechas imediatas da vigaVR1750S5.

As frequências acumuladas de uma distribuição normal e de uma distribuição Lognormal para as flechas imediatas e as frequências acumulada de uma distribuição normal e de uma distribuição Lognormal da viga VR1750S5 são traçadas em um gráfico $Q-Q$, na Figura 118.

Os resultados indicam que a distribuição de probabilidade para as flechas imediatas e totais desta viga é simétrica, e que uma distribuição normal pode representar as distribuições de flechas imediatas e flechas totais desta viga.

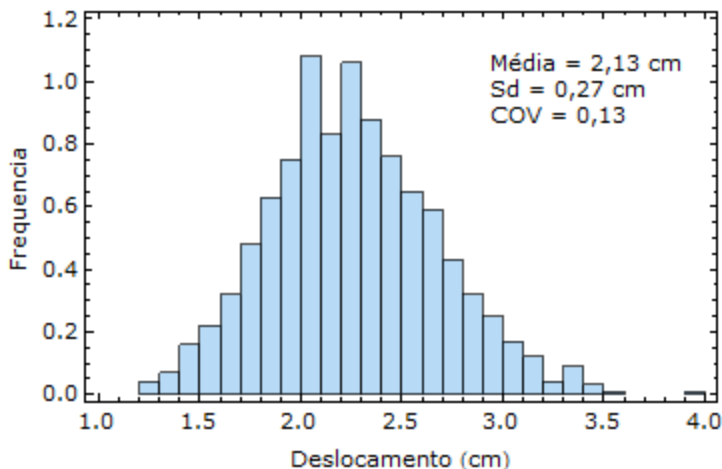


Figura 117 - Histograma das flechas totais da viga VR1750S5.

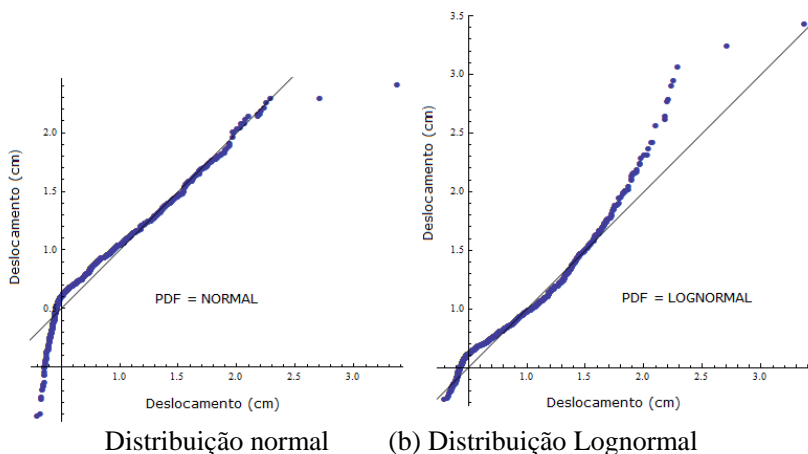


Figura 118 - Gráficos Q x Q, deslocamentos imediatos e distribuição normal e log normal.

A Figura 119 e a Figura 120 apresentam os histogramas dos deslocamentos da distribuição das flechas imediatas e totais da viga VR1750S5 em conjunto com uma distribuição normal com a mesma média e desvio padrão destas distribuições.

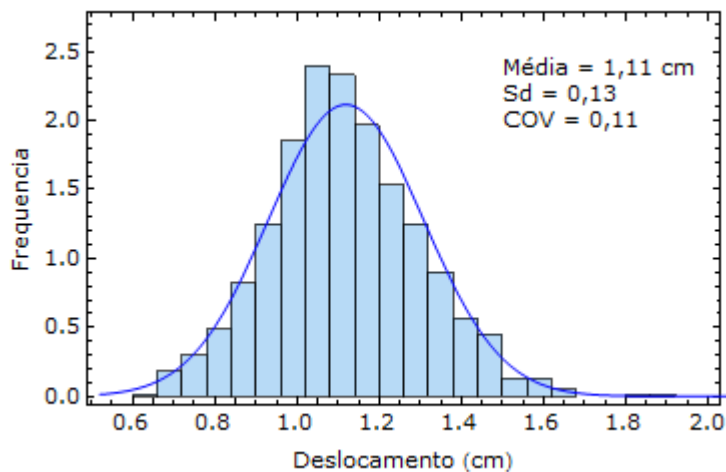


Figura 119 - Histograma flechas imediatas com uma PDF normal, da vigaVR1750S5.

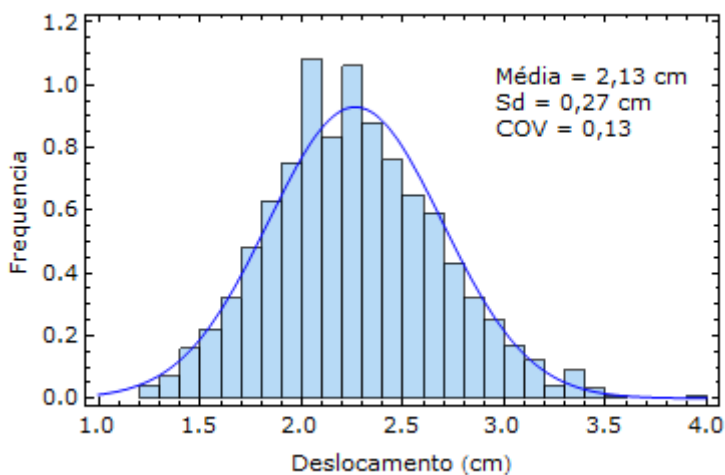


Figura 120 - Histograma das flechas totais com uma PDF normal da vigaVR1750S5.

8.ÍNDICE DE CONFIABILIDADE NO ELS-DEF

8.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a análise de confiabilidade das vigas biapoiadas e lajes unidirecionais biapoiadas de concreto armado no estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF), dimensionadas para o estado limite último (ELU) e estado limite de serviço (ELS) de acordo com as recomendações da NBR 6118 (2007).

O procedimento utilizado para a análise de confiabilidade é a Simulação de Monte Carlo. Conforme visto no item 6.8, a Simulação de Monte Carlo requer o conhecimento das distribuições de probabilidade de todas as variáveis envolvidas no problema e a relação determinística entre estas variáveis que definem o desempenho da estrutura.

No item 6.7 foram apresentadas as estatísticas das variáveis básicas envolvidas no projeto de vigas e lajes unidirecionais. No desenvolvimento a seguir serão apresentadas as simulações e os resultados obtidos (probabilidades de falha e índices de confiabilidade correspondentes).

Como já foi mencionado, para permitir a aplicação dos métodos de confiabilidade estrutural no projeto de vigas de concreto em serviço, pode-se definir que uma falha em serviço ocorre quando os deslocamentos da viga excedem um deslocamento limite especificado.

Para este estudo será considerado apenas o limite de aceitabilidade sensorial para os deslocamentos totais em vigas biapoiadas e lajes biapoiadas e unidirecionais, com o valor limite de $L/250$ (L = vão da viga ou da laje), prescrito pela NBR 6118 (2007).

8.2 Análise de vigas e lajes dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2007)

Para analisar a confiabilidade ao estado limite último por deformação excessiva, serão consideradas vigas e lajes unidirecionais de concreto armado de seções retangulares, simplesmente apoiadas e projetadas com base no estado limite último e ao estado limite de serviço da NBR 6118 (2007).

As vigas e lajes foram submetidas a um carregamento de quatro pontos, semelhante ao utilizado no item 7.3, que é resultante das reações de vigas e lajes de um pavimento típico de edifícios residenciais e comerciais calculados com as combinações de ações de serviço quase permanentes já citadas no item 6.7.7.

O modelo estrutural destes pavimentos com as vigas e lajes é mostrado na Figura 90 e na Figura 91. Os valores das variáveis aleatórias das propriedades dos materiais e das dimensões são obtidos a partir da Tabela 33.

Nos dois próximos itens serão analisadas simulações com a viga VR1750S5 para dois tipo de cargas acidentais, uma de uso comercial e outra de uso residencial. A simulação com cargas acidentais implica no uso de coeficiente de redução $\Psi_2 = 0,4$ para o uso comercial e $\Psi_2 = 0,3$ para o uso residencial.

8.2.1 Simulação para carga acidental em uso comercial

A primeira simulação foi feita para uma carga acidental quase permanente, considerada para o caso de uma edificação de uso comercial, de escritórios, estações ou edifícios públicos, e com um coeficiente $\Psi_2 = 0,4$.

Tabela 50 - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	31,6 MPa	0,176	Normal
f_{ctm}	2,56 MPa	0,218	Normal
E_{ci}	28000 MPa	0,119	Normal
As_{inf}	3,71 cm ²	0,024	Normal truncada
As_{sup}	0,38 cm ²	0,024	Normal truncada
f_y	545MPa	0,050	Normal
E_s	210000 MPa	0,050	Normal
d'	3,29 cm	0,045	Normal
b	17,4 cm	0,045	Normal
h	50,16 cm	0,045	Normal
L	500,4 cm	0,002	Normal
U_r	75%	0,15	Normal truncada
G^1	1,05 x 1,2 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,4 x 2,0 kN/m ²	0,60	Gamma

1) G = carga permanente, $G_{nom} = 1,2 \text{ kN/m}^2$

2) Q = carga acidental quase permanente, $Q_{nom} = 2,0 \text{ kN/m}^2$

A Tabela 50 apresenta as variáveis de projeto aleatórias da viga VR1750S5 e na Figura 121 estão mostradas as características geométricas e a armadura desta viga.

A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 75%. O tipo de cimento considerado foi o CPI e o abatimento do concreto igual a 6 cm.

Esta simulação foi feita para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos, correspondente à vida útil da estrutura.

A Tabela 51 apresenta os resultados estatísticos para os deslocamentos médios imediatos e para os deslocamentos médios totais em diversas idades para a viga VR1750S5. Pode-se observar que o valor do deslocamento médio aumenta e o coeficiente de variação COV diminui com o aumento da idade final considerada. A probabilidade de falha aumenta consideravelmente para idades mais altas, a probabilidade de falha com a idade final de 50 anos é de 0,62 e o índice de confiabilidade é negativo.

A Figura 122 apresenta um gráfico com o resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5 (Figura 121) dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007) e com os parâmetros da Tabela 50. O resultado é para o deslocamento total na idade de 50 anos.

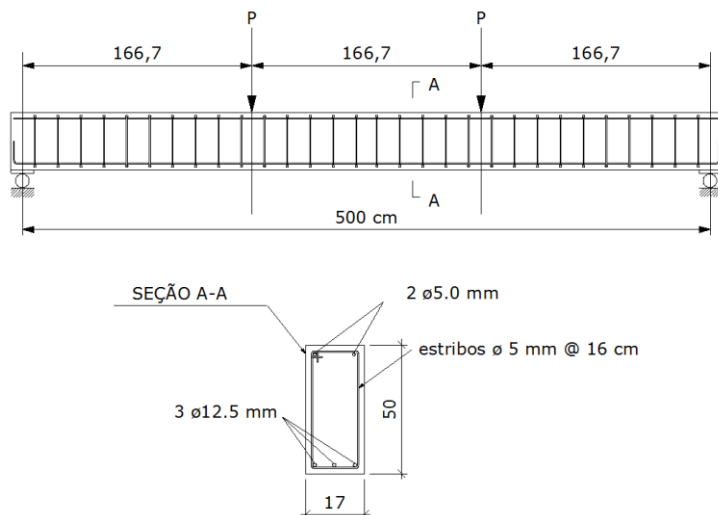


Figura 121 - Viga VR1750S5 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007).

Tabela 51 – Resultados da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5

Tempo	Imediata (cm)			Flecha total (cm)			P_f	β
	Média	S_d	COV	Média	S_d	COV		
50 Anos	1,10	0,30	0,27	2,16	0,51	0,23	0,62	-0,31
8 anos	1,09	0,31	0,29	2,12	0,51	0,24	0,58	-0,02
1 Ano	1,03	0,31	0,30	1,95	0,52	0,26	0,45	0,12
180 dias	1,00	0,31	0,31	1,85	0,53	0,28	0,38	0,31
28 dias	0,92	0,30	0,32	1,77	0,59	0,33	0,36	0,36

Este gráfico apresenta a distribuição dos deslocamentos considerando o vão da viga como uma variável aleatória para o cálculo do deslocamento limite. O vão das vigas nesta simulação variou de 498,3 a 503,7 cm, com um valor médio de 500,4 cm.

Os pontos representam os valores dos deslocamentos de longa duração e os correspondentes deslocamentos limites de cada viga da amostra. É possível observar a maior quantidade de pontos no entorno da média e uma distribuição assimétrica, com uma grande quantidade de pontos na região de falha.

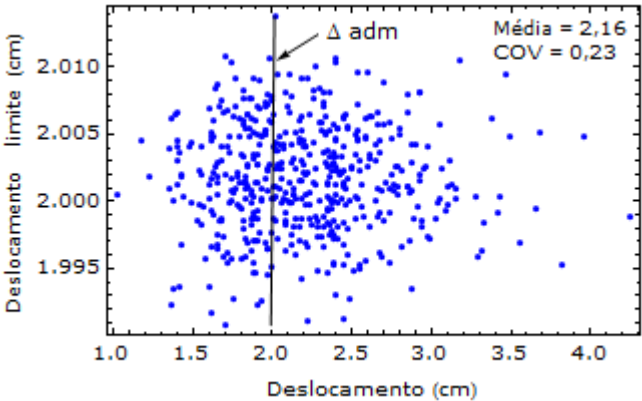


Figura 122 - Resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5. Deslocamento total no meio do vão. $P_f = 0,62$ ($6,2 \times 10^{-1}$).

O resultado da simulação apresentou um deslocamento imediato médio de 1,10 cm, com um desvio padrão 0,30 cm e um coeficiente de variação (COV) de 0,27 e um deslocamento total, no tempo $t = 50$ anos, médio de 2,16 cm, com um desvio padrão 0,51 cm e um coeficiente de

variação (COV) de 0,23. A Figura 123 apresenta os histogramas das flechas imediatas e totais e a distribuição de probabilidade que melhor se adaptou para os dois casos, uma PDF Lognormal.

Com os valores das flechas limites calculados com a relação $L/250$ para os vãos de todas as vigas da amostra, foi determinada uma função limite de falha, conforme mostrado na Figura 122. Esta função de estado limite define duas regiões no espaço amostral, uma região de não falha e uma região de falha.

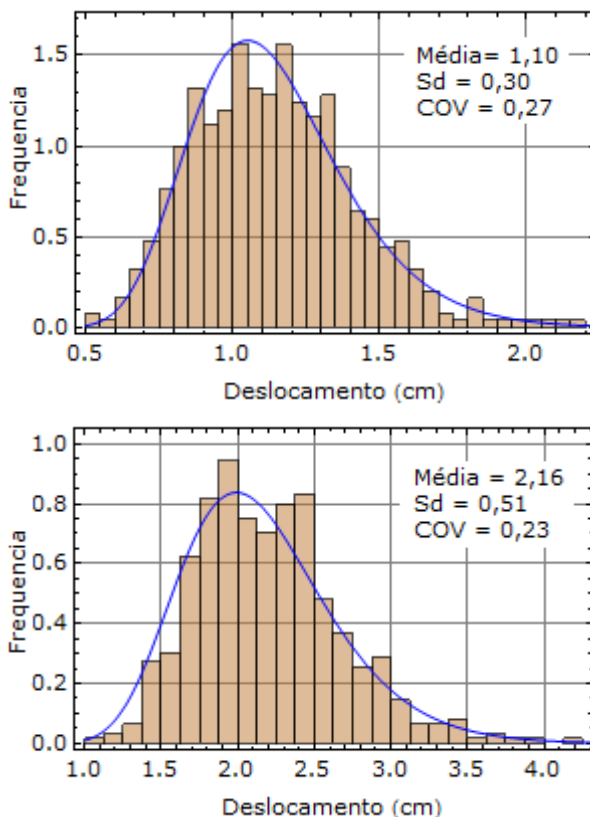


Figura 123 - Histogramas das flechas imediatas e totais ($t = 50$ anos) com distribuição Lognormal. Viga VR1750S5 para U_r 75% e $\phi_2 = 0,4$.

Nesta análise, para um período de referência de 50 anos, 309 vigas da amostra apresentaram flechas acima da flecha limite $L/250$ e foram consideradas como casos de falha, que resultou em uma probabilidade de falha de 0,62. Esta probabilidade de falha equivale a

um coeficiente de confiabilidade $\beta = -0,31$ para o período de utilização de 50 anos.

Para um intervalo de referência de 8 anos, equivalente a um período de ocupação médio de edificação deste tipo, 290 vigas da amostra apresentaram flechas acima da flecha limite $L/250$, que resultou em uma probabilidade de falha de 0,58. O JCSS (2000) recomenda os índices de confiabilidade alvos β_T (associados às taxas de falha alvo) relativos a um ano de período de referência e estados limites de serviço irreversíveis, mostrados na Tabela 19.

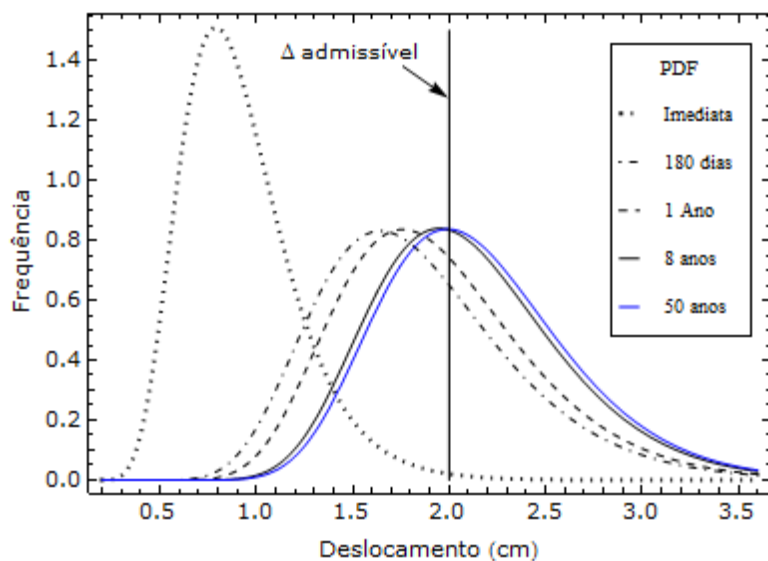


Figura 124 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos imediatos, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a viga VR1750S5.

Se for considerado um custo relativo da medida de segurança como normal, o coeficiente β_T alvo, para um estado limite de serviço irreversível, seria igual a 1,7, relativo a um ano de período de referência.

Este valor de $\beta_T = 1,7$ corresponde a um índice $\beta = 0,5$ para um período de referência de 8 anos e a probabilidade de falha correspondente seria igual a 0,31 (ver Tabela 19). Para o mesmo valor de $\beta_T = 1,7$, relativo a um ano de período de referência, o valor de β correspondente para um período de 50 anos é zero. Para este caso da viga VR1750S5 esperava-se que o índice de confiabilidade para um período de referência de 8 anos fosse superior a 0,5 e equivalente, portanto a uma probabilidade de falha $P_f = 0,30$. O valor de $P_f = 0,58$

para um período de referência de 8 anos representa um índice superior ao desejável que seria de uma probabilidade de falha $P_f = 0,30$.

A Figura 124 apresenta as distribuições de probabilidade (PDF) para os deslocamentos imediatos e para as idades de 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a viga VR1750S5, analisada com uma umidade relativa do ambiente de 75 % e um coeficiente de ponderação das ações acidentais $\Psi_2 = 0,4$.

Pode-se observar que o valor do deslocamento médio nas idades de 8 e 50 anos é praticamente igual ao valor do deslocamento admissível de $L/250$.

8.2.2 Simulação para carga acidental em uso residencial

Esta simulação foi feita para uma carga acidental quase permanente, considerada para o caso de uma edificação de uso residencial com coeficiente $\Psi_2 = 0,3$.

A Figura 125 apresenta um gráfico com o resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007). O deslocamento total foi calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos, correspondente à vida útil da estrutura.

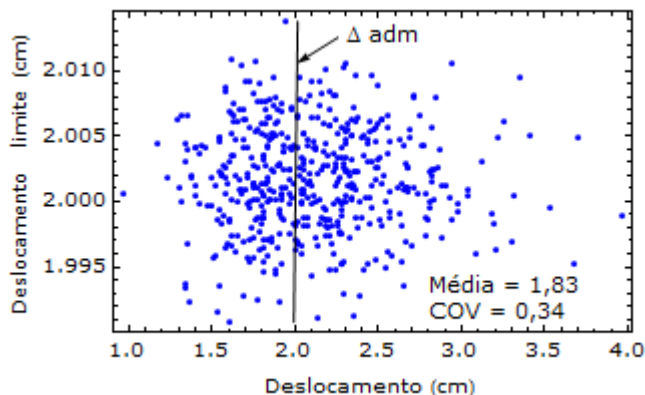


Figura 125 - Resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5. Deslocamento total no meio do vão. $P_f = 0,55$ ($5,5 \times 10^{-1}$).

A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 75% (U_r). O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6 cm.

Para este caso da viga VR1750S5 esperava-se que o índice de confiabilidade para um período de referência de 8 anos também fosse

superior a 0,5 e equivalente a uma probabilidade de falha $P_f = 0,30$. O valor de $P_f = 0,52$ para um período de referência de 8 anos portanto representa também um índice superior ao desejável, ou seja uma probabilidade de falha $P_f = 0,30$.

A Figura 126 apresenta as distribuições de probabilidade (PDF) para os deslocamentos imediatos e para as idades de 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a viga VR1750S5, analisada com uma umidade relativa do ambiente de 75 % e um coeficiente de ponderação das ações acidentais $\Psi_2 = 0,3$. Pode-se observar que o valor do deslocamento médio nas idades de 8 e 50 anos é um pouco inferior ao valor do deslocamento admissível de $L/250$.

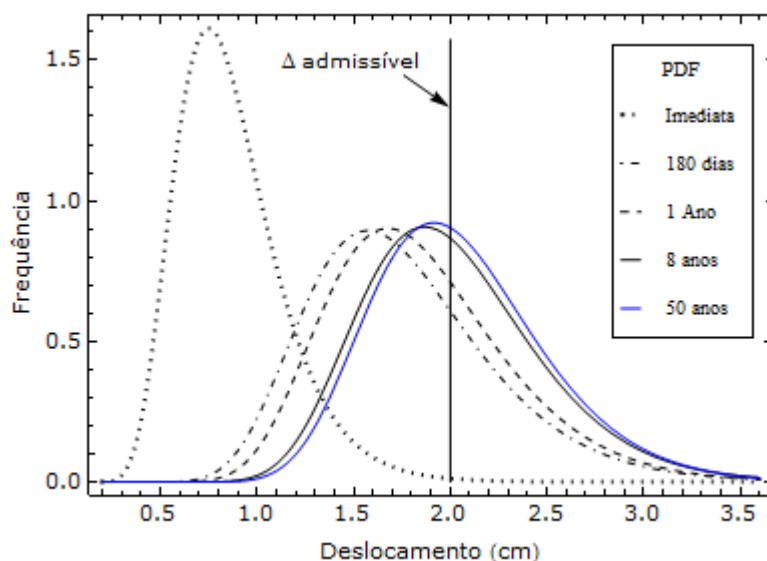


Figura 126 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos imediatos, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a viga VR1750S5, para $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$.

A Figura 127 mostra a variação da probabilidade de falha obtida para a viga VR1750S5, para coeficientes $\Psi_2 = 0,3$ e $\Psi_2 = 0,4$. Pode-se observar que as probabilidades de falha para o caso de edifícios comerciais com $\Psi_2 = 0,4$ são maiores do que para os edifícios residências ($\Psi_2 = 0,3$), porém a aumento da probabilidades de falha com o tempo é semelhante.

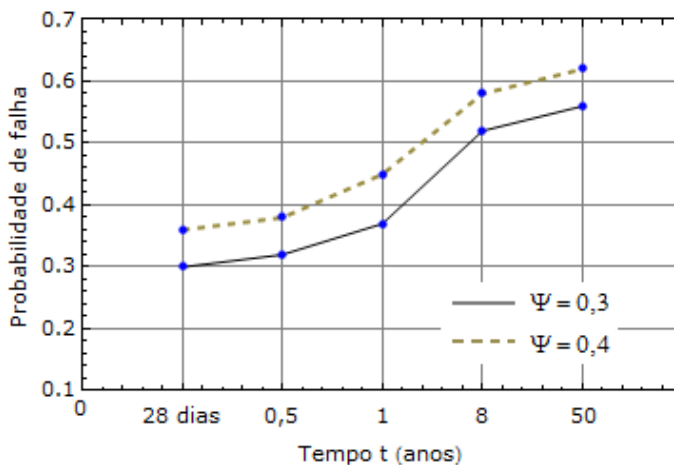


Figura 127 - Probabilidades de falha (P_f) para a viga VR1750S5 para umidade relativa do ambiente $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$ e $0,4$.

8.2.3 Simulação para carregamento aplicado aos 90 dias

Uma simulação para analisar o efeito de uma provável retirada total do escoramento das vigas apenas aos 90 dias após a concretagem foi feita para a mesma viga VR1750S5. O objetivo desta simulação é verificar o efeito da aplicação do carregamento em uma idade t_o mais avançada e analisar o seu efeito nos resultados do deslocamento final de longa duração e consequentemente na probabilidade de falha por deformação excessiva.

Como pode ser constatado, com os resultados apresentados na Tabela 52, a probabilidade de falha é reduzida significativamente com a alteração da idade inicial (t_o). O deslocamento médio aos 50 anos foi reduzido de 2,06 para 1,85 cm e a probabilidade de falha foi reduzida significativamente de 0,62 para 0,36.

Este procedimento pode ser apropriado, nas situações de projeto onde a análise dos deslocamentos é crítica. Pode-se observar também que o valor do deslocamento médio na idade de 50 anos, com $t_o = 90$ dias, é bem inferior ao valor do deslocamento admissível de $L/250$.

A Figura 128 apresenta as mesmas distribuições de probabilidade dos deslocamentos imediatos, para as idades de 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a viga VR1750S5, com distribuição de probabilidade para os deslocamentos imediatos totais na idade de 50 anos e para uma idade de carregamento inicial de 90 dias.

Tabela 52 – Resultados da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5.

Tempo	Imediata (cm)			Flecha total (cm)			P_f	β
	Média	S_d	COV	Média	S_d	COV		
50 Anos ¹	0,97	0,28	0,29	1,85	0,45	0,24	0,36	0,36
50 Anos ²	1,10	0,30	0,27	2,16	0,51	0,23	0,62	-0,31
8 Anos ¹	1,09	0,31	0,29	2,02	0,47	0,23	0,52	-0,05
1 Ano ¹	1,03	0,31	0,30	1,85	0,48	0,26	0,37	0,33
180 dias ¹	1,00	0,31	0,31	1,76	0,49	0,28	0,32	0,47

1) Deslocamentos calculados com $t_0 = 90$ dias.

2) Deslocamentos calculados com $t_0 = 28$ dias.

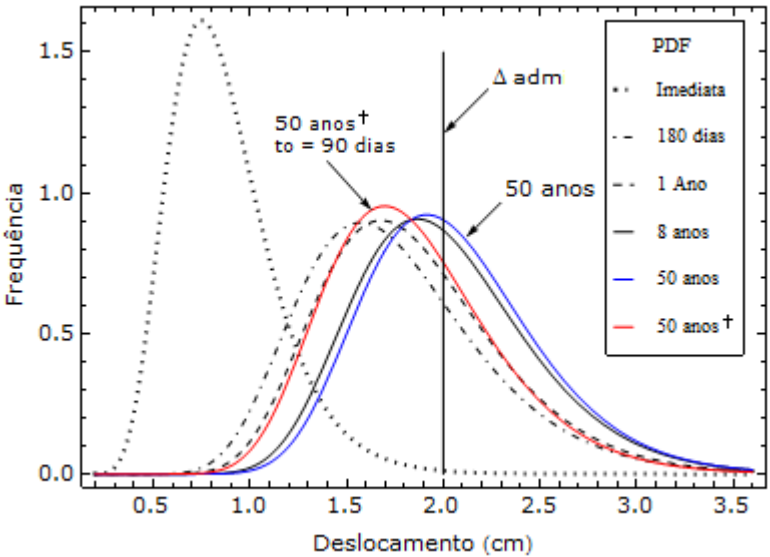


Figura 128 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos imediatos, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos com $t_0 = 90$ dias. Viga VR1750S5, para $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$.

8.2.4 Análise de lajes unidirecionais e biapoiaadas

A Figura 129 apresenta um gráfico com o resultado da simulação de Monte Carlo para a laje LR10025S7 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007). Esta simulação foi feita para um deslocamento total

calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos, correspondente à vida útil da estrutura.

A carga accidental quase permanente foi considerada para o caso de uma edificação residencial, com coeficiente de ponderação das ações accidentais $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 60%. O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6 cm.

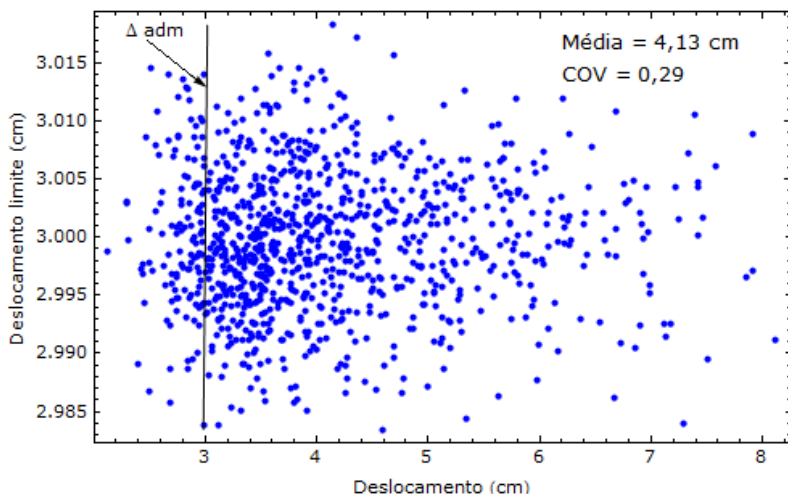


Figura 129 - Resultado da simulação de Monte Carlo para laje LR10025S7. Deslocamento total no meio do vão. $P_f = 0,87$ ($8,7 \times 10^{-1}$).

Tabela 53 - Resultados da simulação de Monte Carlo, LR10025S7.

Tempo	Imediata (cm)			Flecha total ¹ (cm)			P_f	β
	Média	S_d	COV	Média	S_d	COV		
50 Anos	1,35	0,16	0,33	4,13	1,19	0,29	0,87	-1,13
8 Anos	1,51	0,85	0,56	4,07	1,43	0,35	0,82	-0,92
1 Ano	1,49	0,83	0,56	3,75	1,42	0,37	0,67	-0,44
180 dias	1,47	0,83	0,56	3,54	1,43	0,40	0,50	0
28 dias	1,39	0,82	0,58	2,87	1,55	0,54	0,26	0,64

1) $U_r = 60\%$ e $\Psi_2 = 0,3$

Para este caso da LR10025S7 o índice de probabilidade de falha para um período de referência de 8 anos é bem superior ao índice de confiabilidade alvo para 8 anos que é $P_f = 0,30$.

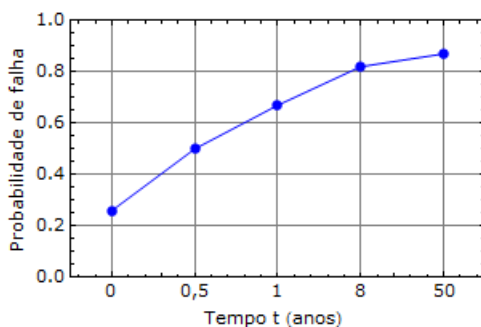


Figura 130 - Probabilidades de falha (P_f) para a laje LR10025S7, umidade relativa $U_r = 60\%$ e $\Psi_2 = 0,3$.

A Figura 131 apresenta as distribuições de probabilidade para os deslocamentos imediatos e para as idades de 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos para a laje LR10025S7.

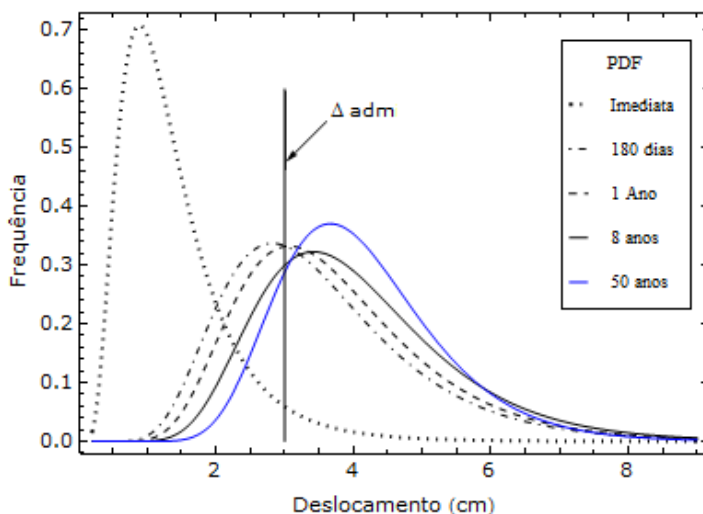


Figura 131 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos imediatos, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos com $t_0 = 28$ dias; laje LR10025S7, para $U_r = 60\%$ e $\Psi_2 = 0,6$.

Pode-se observar que o valor do deslocamento médio nas idades de 8 e 50 anos é bem superior ao valor do deslocamento admissível de $L/250$. As análises desta laje apresentaram valores bastante elevados de probabilidade de falha, em princípio devidos à variabilidade alta dos deslocamentos imediatos e de longa duração. Esta tendência tem uma relação com o efeito da razão de M_f/M_r estar próximo de um.

A Figura 132 apresenta um gráfico com o resultado da simulação de Monte Carlo para a laje LR10025S5 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007). Esta laje tem uma esbelteza menor que a LR10025S7.

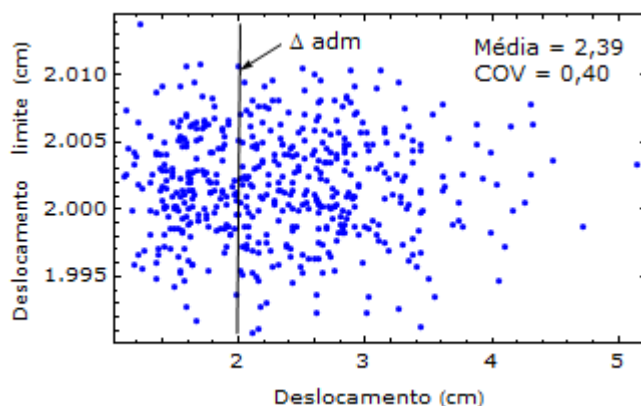


Figura 132 - Resultado da simulação de Monte Carlo para a laje LR10025S5. Deslocamento total no meio do vão. $P_f = 0,61$ ($6,1 \times 10^{-1}$). $U_r = 60\%$ e $\Psi_2 = 0,3$.

Esta simulação foi feita para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos, correspondente à vida útil da estrutura.

Tabela 54 - Resultados da simulação de Monte Carlo, LR10025S5.

Tempo	Imediata (cm)			Flecha total ¹ (cm)			P_f	β
	Média	S_d	COV	Média	S_d	COV		
50 Anos	0,96	0,42	0,44	2,39	0,95	0,40	0,61	-0,28
8 Anos	0,98	0,53	0,54	2,36	0,95	0,40	0,60	-0,26
1 Ano	0,98	0,53	0,54	2,21	0,95	0,43	0,47	0,07
180 dias	0,97	0,53	0,54	2,12	0,95	0,45	0,43	0,18
28 dias	0,93	0,52	0,56	1,86	1,01	0,54	0,30	0,52

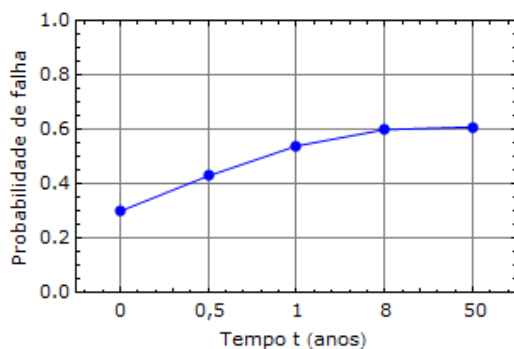


Figura 133 - Probabilidades de falha (P_f) para a laje LR10025S5.

A carga acidental quase permanente foi considerada para o caso de uma edificação residencial, com coeficiente de ponderação das ações acidentais $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 60%. O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6.

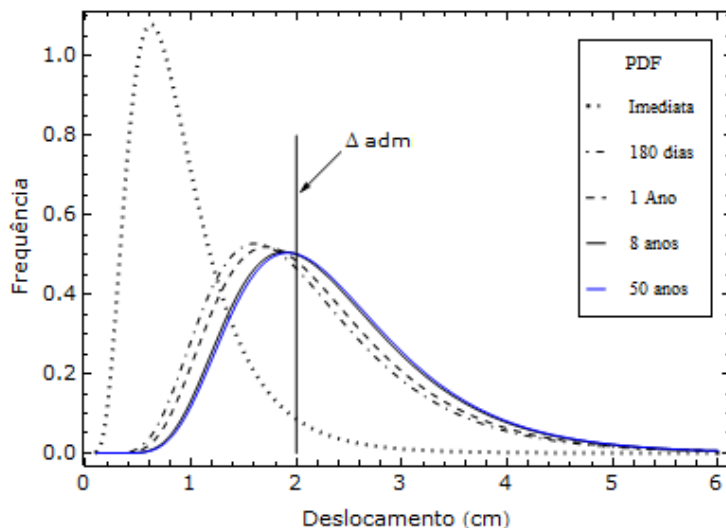


Figura 134 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos imediatos, 180 dias, 1 ano, 8 anos e 50 anos. Laje LR10025S5.

Para este caso da laje LR10025S5 o índice de confiabilidade para um período de referência de 8 anos também deveria ser superior a 0,5 e equivalente a uma probabilidade de falha $P_f = 0,30$. O valor de $P_f = 0,60$

para um período de referência de 8 anos portanto representa um índice superior ao desejável (probabilidade de falha desejável, $P_f = 0,30$). Os resultados da análise desta laje também apresentaram valores elevados de probabilidade de falha, em princípio devidos à variabilidade alta dos deslocamentos imediatos e de longa duração.

8.3 Análise de vigas e lajes dimensionadas com diferentes relações de esbeltez

A Tabela 55 apresenta os resultados da simulação de Monte Carlo para a vigas dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2007), com relações de esbeltez diferentes (L/H).

Esta simulação foi feita para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 8$ anos, equivalente a um período de ocupação médio. A carga acidental quase permanente foi considerada para o caso de uma edificação de uso residencial, com um coeficiente $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 75%. O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6 cm.

A análise foi realizada para avaliar as probabilidades de vigas com diferentes relações de esbeltez, a relação entre o vão e a altura da viga. Pode-se observar que relações de esbeltez diferentes resultam em probabilidades de falha bastante diferentes. A probabilidade de falha aumenta para relações de esbeltez maiores.

Tabela 55 - Simulação de Monte Carlo para vigas VR para diferentes valores de L/H .

	Esbeltez L/H	Flecha total ¹ (cm)				
		Média	S_d	COV	P_f	β
VR1250S4	16	1,41	0,34	0,24	0,26	0,64
VR1750S5	20	2,02	0,47	0,23	0,52	-0,05
VR2050S6	24	2,56	0,64	0,25	0,60	-0,26
VR2550S7	28	3,19	0,82	0,26	0,62	-0,31
VR2550S8	32	3,82	0,99	0,26	0,68	-0,47

1) $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$

A probabilidade de falha varia de 0,26 a 0,68 para relações de esbeltez entre 16 e 32, respectivamente. A variação é bastante

significativa, com índices de confiabilidade β correspondentes entre 0,64 e -0,47.

Estes resultados indicam que os procedimentos da norma NBR 6118 (2007) para o dimensionamento de vigas e lajes de concreto armado ainda não foram submetidos a um procedimento de calibração para os estados limites de serviço (ELS).

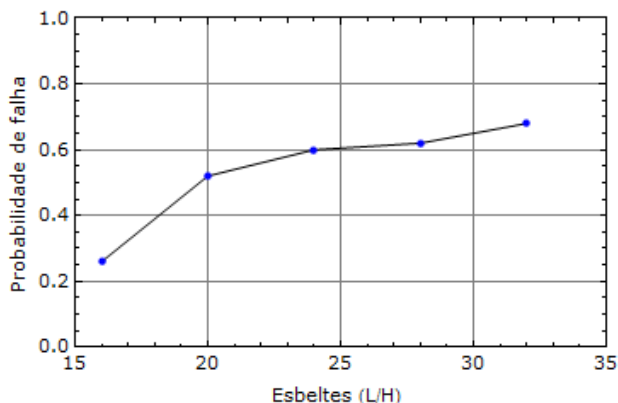


Figura 135 - Probabilidades de falha (P_f) para vigas com diferentes valores de esbeltez L/H .

8.4 Análise em função da resistência do concreto

A Tabela 56 apresenta os resultados da análise com a simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007), para diversos valores da resistência característica do concreto (f_{ck}).

Esta simulação foi feita para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 8$ anos. A carga acidental quase permanente foi considerada com um coeficiente $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 75%. O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6 cm. A análise foi realizada para avaliar as probabilidades de falha com diferentes valores da resistência característica do concreto (f_{ck}).

Pode-se observar que a probabilidade de falha apresenta pequenas diferenças com a alteração da resistência f_{ck} do concreto.

Tabela 56- Simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5 em função da resistência f_{ck} .

f_{ck} MPa	Tempo	Imediata (cm)			Flecha total (cm)			
		Média	S_d	COV	Média	S_d	COV	P_f
20	8 Anos	1,08	0,26	0,25	2,10	0,47	0,22	0,60
25	8 Anos	1,03	0,28	0,27	2,02	0,47	0,23	0,52
30	8 Anos	1,09	0,28	0,25	2,11	0,47	0,22	0,62
35	8 Anos	1,10	0,29	0,26	2,14	0,49	0,23	0,62
40	8 Anos	1,03	0,29	0,28	2,03	0,47	0,23	0,52

1) $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$

8.5 Análise de vigas e lajes dimensionadas com a resistência do concreto à tração inferior

Conforme Ghali e Favre (1994), deve-se ter muito cuidado com o valor da resistência à tração do concreto usada no cálculo dos deslocamentos. Quando a determinação dos deslocamentos é crítica em um projeto, eles recomendam que o cálculo seja feito com o valor mínimo da resistência à tração do concreto.

Conforme a NBR 6118 (2007), a resistência à tração indireta $f_{ct,sup}$ e a resistência à tração na flexão $f_{ct,inf}$ devem ser obtidas em ensaios realizados segundo a ABNT NBR 7222 e a ABNT NBR 12142, respectivamente.

A resistência à tração direta f_{ct} pode ser considerada igual a 0,9 $f_{ct,sup}$ ou 0,7 $f_{ct,inf}$ ou, na falta de ensaios para obtenção dos valores de $f_{ct,sup}$ e $f_{ct,inf}$, pode ser avaliado a partir da resistência à tração média com as seguintes equações:

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} \quad (198)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3f_{ct,m} \quad (199)$$

onde:

$f_{ct,m}$ e f_{ck} são expressos em MPa.

A Figura 136 apresenta um gráfico com o resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5 dimensionada de acordo com a NBR 6118 (2007), porém com o valor da resistência à tração inferior $f_{ctk,inf}$ ao invés do valor da resistência à tração média $f_{ct,m}$. A NBR 6118 (2007) prescreve no seu item 17.3.1 que para o estado limite de

deformação excessiva deve-se usar a resistência à tração média direta do concreto.

A simulação deste item foi feita para um deslocamento total calculado para um tempo inicial de aplicação do carregamento $t_o = 28$ dias e para um tempo final $t = 50$ anos. A carga acidental quase permanente foi considerada para o caso de uma edificação de uso residencial, com um coeficiente $\Psi_2 = 0,3$. A umidade relativa média do ambiente foi considerada igual a 75% (U_r). O tipo de cimento considerado foi CPI e o abatimento do concreto igual a 6.

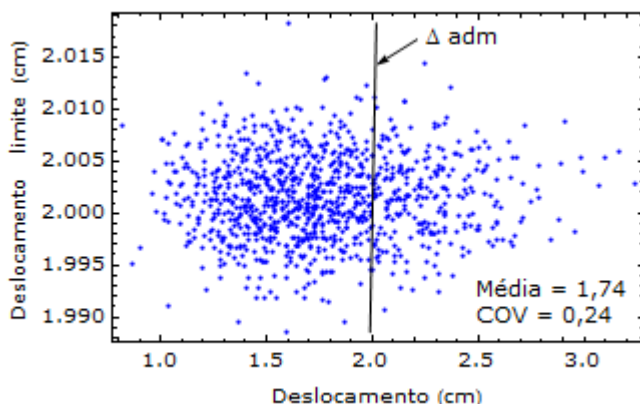


Figura 136 - Resultado da simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5, dimensionada com $f_{ctk,inf}$. Deslocamento total no meio do vão para $t = 50$ anos. $P_f = 0,24$ ($2,4 \times 10^{-1}$).

O resultado da simulação apresentou um deslocamento total médio de 1,74 cm, com um desvio padrão 0,41 cm e um coeficiente de variação (COV) de 0,24 no tempo $t = 50$ anos.

Um teste de hipótese determinou que a distribuição de probabilidade mais adequada para este caso é uma Lognormal, como pode ser observado na Figura 137.

Para esta análise da viga VR1750S5, considerando um período de referência de 50 anos e com uma probabilidade de falha $P_f = 0,24$ o índice de confiabilidade é de $\beta_T = 0,7$ e para um período de referência de 8 anos com uma probabilidade de falha $P_f = 0,22$, o índice de confiabilidade é de $\beta = 0,8$ (Tabela 15).

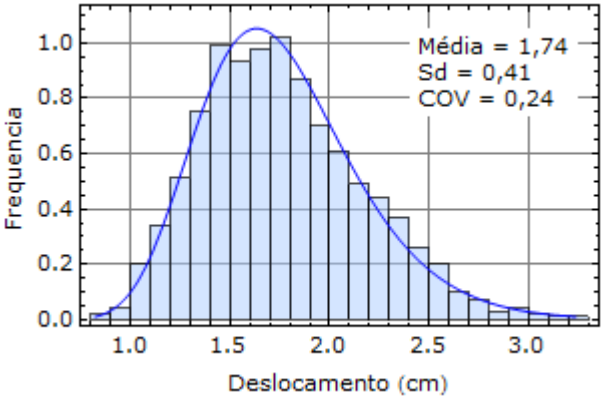


Figura 137 - Histograma das flechas totais (t = 50 anos) com distribuição Lognormal. Viga VR1750S5 para $U_r = 75\%$ e $\phi_2 = 0,3$ e dimensionada com $f_{ctk,inf}$.

Tabela 57 - Simulação de Monte Carlo para a viga VR1750S5, dimensionada com $f_{ctk,inf}$.

		Imediata (cm)			Flecha total ¹ (cm)				
fck	Tempo	Média	S _d	COV	Média	S _d	COV	P _f	β
f _{ctk,inf}	50 anos	0,86	0,24	0,28	1,74	0,41	0,24	0,24	0,7
f _{ctk,inf}	8 Anos	0,85	0,25	0,29	1,70	0,41	0,24	0,22	0,8

1) $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$

A Figura 138 apresenta as distribuições de probabilidade (PDF) para os deslocamentos imediatos e para as idades de 180 dias, 1 ano e 50 anos para a viga VR1750S5, em conjunto com a PDF obtida com a viga dimensionada com o valor inferior de resistência à tração do concreto $f_{ck,inf}$. Pode-se observar que o valor do deslocamento médio na idade de 50 anos para esta simulação é bem inferior ao valor do deslocamento admissível de $L/250$.

Estes resultados indicam que pode ser apropriado, nas situações de projeto onde a análise dos deslocamentos é crítica, o uso de resistências à tração do concreto menores do que o valor médio. Nestes casos o valor da resistência mínima à tração prescrita pela NBR 6118 (2007) deve ser usado.

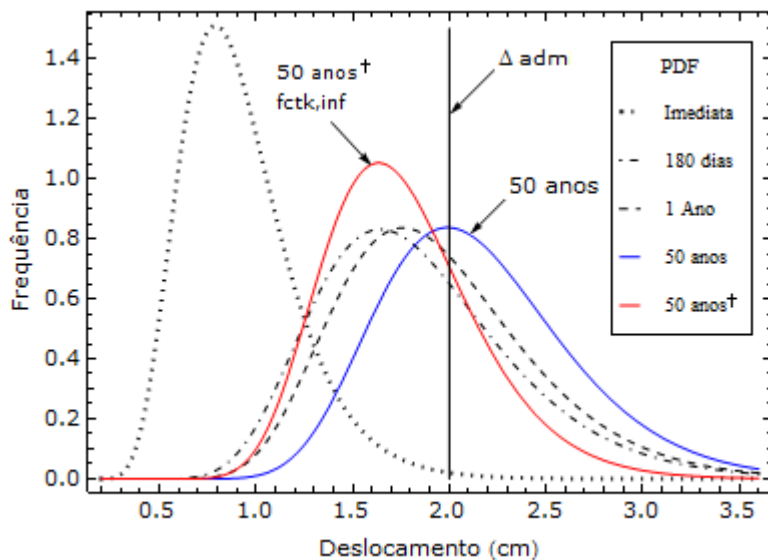


Figura 138 - Distribuições de probabilidade (PDF) para deslocamentos obtidos com a viga VR1750S5 dimensionada com $f_{ctk,inf}$; para $U_r = 75\%$ e $\Psi_2 = 0,3$.

9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este estudo utilizou simulações pelo Método de Monte Carlo para analisar a variabilidade e a distribuição probabilística dos deslocamentos imediatos e totais, ou de longa duração, de vigas biapoiadas e lajes unidirecionais biapoiadas de concreto armado. Estas vigas e lajes foram dimensionadas para atender aos estados limites últimos (ELU) e aos estados limites de serviço (ELS) de acordo com as prescrições da norma brasileira NBR 6118 (2007). Foi utilizado um modelo não linear empregando o método da fissuração progressiva para o cálculo dos deslocamentos imediatos e deslocamentos totais que considera a fissuração, os efeitos da retração e da fluência do concreto e o enrijecimento do concreto entre as fissuras (*tension stiffening*).

O modelo mecânico implementado foi verificado pela comparação entre os deslocamentos calculados e os deslocamentos medidos para vigas e lajes ensaiadas em laboratório por diversos autores. Os resultados apresentaram uma boa concordância, mostrando que o modelo mecânico implementado representa adequadamente o comportamento de vigas e lajes biapoiadas de concreto armado.

Diversas análises realizadas indicaram que os melhores resultados do modelo mecânico são obtidos quando o efeito de *tension-stiffening* é dependente da taxa de armadura, do diâmetro das barras da armadura, da tensão de aderência, da resistência à tração do concreto, da distribuição e do espaçamento entre as armaduras longitudinal de flexão.

Verificou-se também que a propriedade do aço da armadura das vigas é de extrema importância para o modelo mecânico, especialmente no trecho final do ramo ascendente e no patamar de escoamento, bem como o ponto onde acontece a ruptura da viga. Os melhores resultados foram obtidos para os casos em que foram fornecidos, pelos autores, os parâmetros de ensaio dos aços utilizados nas armaduras. Em muitos resultados de ensaios de laboratório disponíveis na literatura estes valores não são fornecidos, ou apresentam apenas os valores nominais dos aços empregados.

Os resultados deste estudo confirmaram a tendência reportada por diversos autores, indicando que a variabilidade dos deslocamentos imediatos e totais de vigas biapoiadas e lajes unidirecionais e biapoiadas de concreto armado é elevada. Os coeficientes de variação (COV) obtidos nas simulações variam de forma significativa entre 0,10 a 0,63.

Os estudos indicaram que a variabilidade dos deslocamentos de vigas e lajes de concreto armado depende basicamente da razão entre o momento fletor na seção crítica e do momento de fissuração da viga ou

da laje. Os valores mais elevados de COV foram observados para deslocamentos que ocorrem quando os valores dos momentos fletores atuantes na seção crítica estão próximos dos valores do momento de fissuração.

Os estudos demonstram que a taxa de armadura de flexão tem uma grande influência no coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos imediatos e totais. A tendência é de um aumento do COV com a diminuição da taxa de armadura de flexão. Esta tendência tem uma relação com o efeito da razão entre o momento fletor na seção crítica e o momento de fissuração, pois taxas de armaduras maiores são necessárias para momentos fletores de serviço mais elevados, e momentos fletores mais elevados aumentam a probabilidade de formação de fissuras.

A maioria das análises demonstraram que o coeficiente de variação (COV) dos deslocamentos diminui com o tempo, em função do aumento do deslocamento médio, mesmo que em muitos casos haja um aumento no desvio padrão.

Os resultados obtidos neste trabalho sugerem que a probabilidade de falha para o estado limite de deformações excessivas calculadas para o efeito de aceitabilidade sensorial preconizado pela NBR 6118 (2007) não é consistente para uma ampla faixa de vãos de vigas biapoiadas e lajes unidirecionais e biapoiadas. A variação na relações de esbeltez de vigas e lajes resulta em probabilidades de falha bastante diferentes. A probabilidade de falha aumenta para relações de esbeltez maiores. A mesma tendência foi obtida para valores diferentes da consistência do concreto no lançamento. Valores mais elevados de abatimento do concreto fresco no lançamento resultaram em probabilidades de falha mais elevadas.

Foi possível constatar que a probabilidade de falha é reduzida significativamente com a alteração da idade inicial (t_o) em que é aplicado os carregamentos. Isto foi verificado em diversos casos analisados, nos quais o início do carregamento aplicado foi considerado aos 90 dias.

Constatou-se que a umidade relativa do ambiente tem uma grande influência no tipo de probabilidade de falha analisada. A tendência é de um aumento da probabilidade de falha em função da diminuição da umidade relativa do ambiente. Isto se deve ao fato de os deslocamentos totais aumentarem devido aos efeitos da fluência e da retração do concreto.

Foi observado, que em muitos casos, para as vigas e lajes consideradas neste estudo, os índices de confiabilidade são bem inferiores aos índices de confiabilidade alvo. Isto parece indicar que a

norma brasileira NBR 6118 (2007) ainda não foi submetida a um procedimento de calibração para os estados limites de serviço.

Recomenda-se que para as situações de projeto nas quais os deslocamentos são determinantes nas dimensões de vigas e lajes, a sensibilidade dos deslocamentos calculados aos diversos parâmetros pode ser considerada para determinar uma faixa de valores prováveis a ser esperada na estrutura construída. Nestas situações deve-se seguir a recomendação do item 8.2.11 da NBR 6118 (2003) e calcular as deformações específicas devidas à retração e à fluência de acordo com as indicações do Anexo A da mesma norma. Nestes casos devem-se utilizar valores mais realistas para a umidade relativa do ambiente, para a consistência do concreto no lançamento e para o tipo de cimento.

Deve-se evitar o início da aplicação de cargas em idades mais baixas, com a alteração da idade inicial (t_o) em que feita a retirada total dos escoramentos. Recomenda-se que retirada total dos escoramentos seja feita em idades superiores aos 90 dias. Pode também ser apropriado, nestas situações de projeto onde a análise dos deslocamentos é crítica, o uso de resistências à tração do concreto menores do que o valor médio. Nestes casos o valor da resistência mínima à tração prescrita pela NBR 6118 (2007) pode ser usado.

Para pesquisas futuras recomenda-se que a análise da variabilidade dos deslocamentos e o cálculo dos índices de confiabilidade sejam feitos também para vigas contínuas e painéis contínuos de lajes. No caso dos painéis de lajes, um estudo específico para lajes nervuradas construídas com diversos tipos de enchimento e com formas do tipo cubetas será de grande relevância para a construção de edifícios comerciais. Recomenda-se também um estudo de confiabilidade para os limites de deslocamento que levam em consideração os efeitos em elementos não estruturais, efeitos estruturais em serviço e efeitos em elementos estruturais.

Recomenda-se ainda a análise de confiabilidade com módulos de elasticidade do concreto com valores médios obtidos de levantamentos estatísticos atualizados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALMEIDA, A. F. Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado, Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008

AL-SHAIKH, A.H. e AL-ZAID, R. Effect of Reinforcement Ratio on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams, ACI Structural Journal/March - April 1993. Title N° 90-S15

ÁLVARES, M.S. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação do método dos elementos finitos. Dissertação, SET-EESC-USP; São Carlos, 1993

ARAÚJO, J. M. Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. Teoria e prática na engenharia civil, n. 5, p. 1-10, ago., 2004.

BATHE, K. J. Finite Element, Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996

BAZANT, Z. P. e OH, B. H. Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams, ACI Journal/May - June 1984, Title N° 81-26

BAZANT, Z.P. e BAWEJA, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3. *Materials and Structures*, v.28, n.180, p.357-65, 1995

BAZANT, Z.P. e BAWEJA, S. Justification and refinements of Model B3 for concrete creep and shrinkage, Statistics and sensitivity, *Materials and Structures*, v.28, n.181, p.415-430, 1995

BAZANT, Z.P. e CHERN, J.C. Comment on the use of ross'hyperbola and recent comparisons of various practical creep prediction models, *Cement and Concrete Research*, v.12, n.4, p.527-32, 1982

BAZANT, Z.P. e LIU, K.L. Random creep and shrinkage in structures sampling. *Journal of Structural Engineering*, v.111, n.5, p.1113-34, 1985

BEBER, A. J. Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono. Dissertação de mestrado. CPGEC/UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999, 108 pp.

BEBER, A. J. Reforço de estruturas de concreto com compósitos de fibra de carbono. CPGEC/UFRGS. Caderno Técnico. Porto Alegre, RS, Brasil, 1999, 37 pp.

BECK, A. T. Notas de Aula, EMC 6501, Confiabilidade de estruturas II, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005

BECK, A. T. Curso de Confiabilidade Estrutural, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011, 217 pp.

BELARBI, A. e HSU, T. T. C. Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete. ACI Structural Journal/July - August 1994. Title N° 91-S46

BENJAMIN J. R. e CORNELL C. A., “Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers”, New York, McGraw-Hill Book Company, 1970.

BISCHOFF, P. H. Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber-reinforced polymer bars, Journal of Structural Engineering, 131(5), 752-767 – 2005.

BRAGA D. K. e AMORIN C.N.D. Conforto térmico em edifícios residenciais do plano piloto de Brasília, I Conferência latino-americana de construção sustentável Encontro Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído, São Paulo, 2004.

BRANSON, D.E. Design Procedures for Computing Deflections, ACI Journal, 65(9), 730-742, 1968.

BRANSON, D. E. e TROST, H. Unified Procedures for Predicting the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Nonprestressed and Prestressed Concrete Members, ACI Journal/March - April 1982. Title N° 79-13.

BUCHAIM, R. A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo – 2001.

CARREIRA, D.J. - Time dependent Deflections in Reinforced Concrete Beams under Cyclic Loading. PhD thesis - Illinois Institute of Technology, Illinois, 1983.

CARREIRA, D. J. e CHU, K. H. Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Tension, ACI Journal/January - February 1986. Title N° 83-3.

CARREIRA, D. J. e CHU, K. H. Stress-Strain Relationship for Reinforced Concrete in Compression, ACI Journal/January - Nov.-Dec 1985. Title N° 82-6.

CHEUNG, A. B. Modelo estocástico de pressões de produtos armazenados para a estimativa da confiabilidade estrutural de silos esbeltos, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007, 333 pp.

CHONG, T.K. – Numerical Modeling of Time-dependent Cracking and Deformation of Reinforced Concrete Structures, PhD thesis, University of New South Wales, Sydney, 2004.

CHOI, B. S. - Variability of Reinforced Concrete Beam Deflections., PhD thesis, The Pennsylvania State University, Pennsylvania, 1998, 244 pp.

CHOI, C.K. e CHEUNG, S.H. Tension Stiffening Model for Planar Reinforced Concrete Members, Computers & Structures, 59(1), 179-190, 1996.

CHOI, B. S., SCANLON, A. e JOHNSON, P. A. Monte Carlo Simulation of Immediate and Time-Dependent Deflections of Reinforced Concrete Beams and Slabs, ACI Structural Journal/September - October 2004. Title N° 101-S62.

CLARK, L.A. e SPEIRS, D.M. Tension Stiffening in Reinforced Concrete Beams and Slabs under Short-Term Load, Technical Report No. 42.521, Cement and Concrete Association, London, 1978.

CLARK, L.A. e CRANSTON, W.B. The influence of Bar Spacing on Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs, Proceedings, International Conference on Concrete Slabs, Dundee, 1979.

CORNELL, C.A. A probability based structures cod. Journal of American Concrete Institute, 66 (12) 974-985, 1969.

COOK, R. D., MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: Wiley, 1974.

EL-METWALLY, S. E. e CHEN, W. F. Load-Deformation Relations for Reinforced Concrete Sections, ACI Structural Journal/March - April 1989. Title N° 86-S18.

ESMAEILY A e XIAO Y. Behavior of Reinforced Concrete Columns under variable axial loads: analysis, ACI JOURNAL, 102(5), 2005, PP.736-744.

FIELDS K. e BISCHOFF P.H., Tension Stiffening and Cracking of High-Strength Reinforced Concrete Tension Members”, ACI Journal, 101(45), 2004, 447,456.

FLOEGL H. e MANG H. A. Tension Stiffening Concept Based on Bond Slip, Journal of the Structural Div., ASCE, 1982, 108(12)

GALAMBOS, T. V. e ELLINGWOOD B. Serviceability limit states: Deflection, Journal of Structural Engineering, ASCE 112(1), 1986, 76-84.

GHALI, A. e AZAMEJAD, A. Deflection Prediction of Members of Any Concrete Strength, ACI Structural Journal/September - October 1999. Title N° 96-S89.

GHALI, A. e FAVRE, R. Concrete Structures: Stresses and Deformations, Spon Press, London, 1994.

GHALI, A. Deflection of Reinforced Concrete Members: A Critical Review, ACI Structural Journal/July - August 1993, Title N° 90-S39.

GILBERT, R. I. Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures - Why We Sometimes Get it Wrong, ACI Structural Journal/November - December 1999. Title N° 96-S114.

GILBERT, R.I. e WARNER, R.F. Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs, *Journal of the Structural Div., ASCE*, 1978, 104(12),1885-1900.

GOLUB, G. H. e LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins, Baltimore,1989.

GOULART S. V. G. Dados climáticos para avaliação de desempenho térmico de edificações em Florianópolis, Dissertação de mestrado, UFSC- Universidade Federal de Santa Catarina, 1993, 124 pp.

HALDAR, A. e MAHADEVAN, S. *Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design*. New York: Wiley, 2000.

HALDAR, A. e MAHADEVAN, S. *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*, New York: Wiley, 2000.

JOKINEN, E. P. e SCANLON, A. Field Measured Two-Way Slab Deflections", *Proceedings of the 1985 Annual Conference, CSCE*, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, May 1985, pp. 43-58.

KAKLAUSKAS, G. e GHABOUSSI, J. Stress-Strain Relations for Cracked Tensile Concrete from RC Beam Test, *Journal of Structural Engineering/ January 2001*.

KATAOKA, L. T. Análise da Deformabilidade por Fluência e Retração e sua Utilização na Monitoração de Pilares de Concreto Armado, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010, 230 pp.

KWAK H.G. e KIM S. P. Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relations, *Computer and Structures* 80 (2002) 615-628.

KOTTEGODA, N. T. e ROSSO, R. *Statistics, Probability, and Reliability for Civil and Environmental Engineers*, McGraw-Hill, Singapore, 1998.

LEE Y. H., SCANLON A., e KIM H., Deflection Control of Concrete Members Based on Utility Theory, *ACI Journal*, 2007, 65(9), 60-67.

LEHMER, D.H. Mathematical methods in large-scale computing units, In Proc. 2nd Sympos. on Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, MA, 1949, p. 141-146, Cambridge, MA, 1951. Harvard University Press.

LEE, Y. H. e SCANLON, A. – Serviceability Criteria for Design of Reinforced Concrete Structures. The Pennsylvania State University.

LIN, C.S., SCORDELIS, A.C. NonLinear Analysis of RC Shells of General Form, Journal of the Structural Div., ASCE, 1975, 101(3), 523-538.

LLINÁS, L. T. Modelo Numérico y Verificación Experimental del Comportamiento en Servicio de Estructuras de Hormigón, Tese de Doutorado, Universidade Politécnica de Catalunya, Barcelona, 2001, 237 pp.

LOPES P. A. e REAL M. V. e CAMPOS FILHO A, Aplicação dos métodos FORM e Monte Carlo na avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado recuperadas com PRFC. 4º Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, RS, 2010.

LORIGGIO, D. D. Notas de aula, ECV5255, Análise Computacional de Estrutura, Florianópolis, 2005.

MADSEN H.O., ADDO T. e LIND N. C. Methods of Structural Safety, Prentice Hall, 1986.

MELCHERS, R. E. Structural Reliability Analysis and Prediction. Australia: Wiley, 1987, 2002.

MEHTA, P.K. e MONTEIRO, P.J.M. Concreto: Estrutura, Propriedade e Materiais. São Paulo: PINI, 1994.

MERLIN A. J. Análise probabilística do comportamento ao longo do tempo de elementos parcialmente pré-moldados com ênfase em flechas de lajes com armação treliçada, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006, 320 pp.

MIRZA, S. A. e LACROIX, E. A. Comparative Study of Strength-Computation Methods for Rectangular Reinforced Concrete Columns, *ACI Structural Journal*/July - August 2002. Title N° 99-S41.

MIRZA S. A., HATZINNIKOLAS, M. e MacGREGOR, J.G. Statistical Description of the Strength of Concrete, *ASCE Structural Division*, V105, No ST 6, June 1979, pp. 1021-1037.

MIRZA S. A. e MacGREGOR, J.G.. Variations in dimensions of reinforced concrete members, *ASCE Structural Division*, 105 (ST4) 751-766

MÖRSCH, E. Concrete-Steel Construction, Tradução da 3ª Edição por E. P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 368 pp.

MUÑOZ M. B., Study of bond behaviour between FRP reinforcement and concrete, PhD thesis, University of Girona, Girona, 2010, 340 pp.

NEVILEE, A. M. Creep of Plain and Structural Concrete, New York: Longman Inc., 1983.

NOWAK, A. S. e COLLINS, K. R. Reliability of Structures, McGraw-Hill, 2000.

PARK, R. e PAULAY, T. Reinforced Concrete Structures, New Zealand: Wiley - Interscience, 1975.

PEREIRA, J. S. Modelo não-linear de viga para a obtenção de esforços em serviço aplicado a lajes de barragens de enrocamento com face de concreto, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

PRAKHYA, G. K. V. e MORLEY, C. T. Tension-Stiffening and Moment-Curvature Relations of Reinforced Concrete Elements, *ACI Structural Journal*/September - October 1990. Title N° 87-S61.

RAO P.S. e SUBRAHMANYAM B.V. Trisegmental moment-curvature relations for reinforced concrete members. *ACI Journal*, No. 5, **70**(1973) 346-51.

REAL M. V. e CAMPOS FILHO A. Análise probabilística de estruturas de concreto armado, Teoria e Prática na Engenharia Civil, No.1, p.37-46, Nov., 2000.

REAL M. V. e CAMPOS FILHO A, Aplicação do método de Monte Carlo no estudo de vigas e pilares de concreto armado, Teoria e Prática na Engenharia Civil, No. 2, p.35-44, Maio, 2000.

REID, S. e TURKSTRA, C. Serviceability limit states probabilistic description, Rep. No. ST 80-1, Depto. of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Canada, 1980.

RIBEIRO, S. E. C. Análise da confiabilidade de vigas de concreto armado com plástico reforçado por fibras, Tese de doutorado, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 139 pp, 2009.

RILEM - Technical Committee 130-CSL, Durability design of concrete structures Report 14, Ed. A. Sarja e E. Vesikari, E & FN Spon, 1996, 165 pp.

ROSOWSKY, D. V., STEWART, M. G. e KHOR, E. H. Early-Age Loading and Long-Term Deflections of Reinforced Concrete Beams, ACI Structural Journal/May - June 2000, Title N° 97-S56.

SBAROUNIS, J. A. Multi-Story Flat Plate Buildings, Measures and Computed One-Year Deflection", Concrete International, V6, No 8, Aug 1984, pp 31-35

SCANLON, A. e MURRAY, D.W. Time-Dependent reinforced Concrete Slab Deflections, Journal of the Structural Div., ASCE, 1974, 100(9),1911-1924

SHIMAS, H., CHOU L.L. e OKAMURA H. Bond characteristics in post-yield range of deformed bars, Journal of Structural Engineering, No. 378/V-6, Feb. 1987

STEPHEN K. S. e SCANLON, A. Deflection of two-way slabs subject restrained volume change and transverse loads, ACI Structural Journal/May, September-October 1986. Title N° 83-S67

STEWART, M.G. Serviceability Reliability Analysis of Reinforced Concrete Structures, Journal of Structural Engineering/ July, 1996

STEWART, M.G. Reliability Safety Assessment of Corroding Reinforced Concrete Structures Based on Visual Inspection Information.” ACI Structural Journal/November - December 2010. Title N° 107-S66

STRAMANDINOLI R.S.B., ROVERE H.L.L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. Engineering Structures 2008;30:2069–2080.

STRAMANDINOLI R.S.B., Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado, Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007, 238 pp.

SÜSSEKIND, J.C. - Curso de Concreto Armado, v. 1 e 2, Editora Globo, Porto Alegre, 1980.

TAM K. S. S. e SCANLON, A. Deflection of Two-Way Slabs Subjected to Restrained Volume Change and Transverse Loads, ACI Journal/September - October 1986. Title N° 83-67

TEPLY B., ROVNANIKOVA P. e KERSNER, Z. Probability analysis of carbonation effect in RC cross sections, International Conference Failures of concrete structures-RILEM, Bratislava, Eslovaquia, 1993, pp.80-83

TENG, S. e BRANSON, D. E. Initial and Time-Dependent Deformation of Progressively Cracking Non Prestressed and Partially Prestressed Concrete Beams, ACI Structural Journal/September - October 1993, Title N° 90-S49

TROST, H. Implications of the Superposition Principle in Creep and Relaxation Problems for Concrete and Prestressed Concrete, Beton und Stahlbetonbau (West Berlin), V. 62, 1967, pp. 230-238 and 261-269.

VESIKARI, E. Service life prediction of concrete structures with regard to corrosion of reinforcement, Technical Research Centre of Finland, Report N° 553(Espoo), Finlandia, 1988, 53 pp.

WEAVER, W. e GERE, J. M. - Matrix Analysis of Framed Structures, New York: D. Van Nostrand, 1980.

WILLIAMS, A. Test on Large Reinforced Concrete Elements Subjected to Direct Tension, Technical report No. 42.562, Cement and Concrete Association, London, 1986

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

NORMAS TÉCNICAS

ABNT NBR-6118:2007 - Projeto de estruturas de concreto – Procedimento - Rio de Janeiro, ABNT, 2007.

ABNT NBR-6118:1980 Projeto e execução de obras em concreto armado. NBR-6118/80. Rio de Janeiro, ABNT, 1980.

ABNT NBR 6120:1980 - Cargas para o cálculo de estruturas de edificações – Procedimento

ABNT NBR 6122:1996 - Projeto e execução de fundações – Procedimento

ABNT NBR 6123:1988 - Forças devidas ao vento em edificações – Procedimento

ABNT NBR 7480:1996 - Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado – Especificação

ABNT NBR 7680:1983 - Extração, preparo, ensaio e análise de testemunhos de estruturas de concreto –Procedimento

ABNT NBR 8522:1984 - Concreto - Determinação do módulo de deformação estática e diagrama tensão deformação - Método de ensaio

ABNT NBR 8681:2003 - Ações e segurança nas estruturas – Procedimento

ABNT NBR 8953:1992 - Concreto para fins estruturais - Classificação por grupos de resistência - Classificação

ABNT NBR 11578:1991 - Cimento Portland composto – Especificação

ABNT NBR 12142:1991 - Concreto - Determinação da resistência à tração na flexão em corpos-de-prova

ABNT NBR 12655:1996 - Concreto - Preparo, controle e recebimento – Procedimento.

ACI 318-05 - Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary - ACI Committee 318, 2005, 430 pp.

ACI SP-86-85, "Deflections of Concrete Structures," (ACI 435.2R-66) (Reapproved 1984), American Concrete Institute, Detroit, 1985, 29 pp.

ACI Committee 435, "Variability of Deflections of Simply Supported Reinforced Concrete Beams," (ACI 435.4R-66) (Reapproved 1984), American Concrete Institute, Detroit, 1972, 7 pp.

ACI Committee 209R-92- Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures - ACI Committee 209 - 1997.

Comité Euro-Internacional du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. Design Code. London, Thomas Telford Services, 1993.

EN 1990 Eurocode: Basis of structural design. European Committee for Standardization, 2002.

fib(CEB-FIP) Model Code 2010. Draft Model Code. March 2010. Bulletin 55. v.1

fib(CEB-FIP). Model Code for Service Life Design. International Federation for Structural Concrete. 2006. 109 p.

LIFECON - Life Cycle Management of Concrete Infrastructures for Improved Sustainability, Service Life Modes. Technical Research Centre of Finland (VTT). 2003. 169 p.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BASIS OF STRUCTURAL DESIGN – Guide to Interpretative Documents for Essential Requirements, to EN 1990 and application and use of Eurocodes – Leonard da Vinci Pilot Project CZ – 2004.

COMREL USERS MANUAL - Structural Reliability Analysis Program System - RCP - GmbH - München- 1991.

DEFLECTIONS OF CONCRETE STRUCTURES. ACI – American Concrete Institute, Detroit - SP - 86. 1986.

JANKOWSKY I. P., BRANDAO A. T. O. OLIVEIRA H., LIMA J. C. e MILANO. Estimativas da umidade de equilíbrio para cidades da região sul do Brasil, IPEF, n.32, p.61-64, abr.1986

L'ECUYER, P. Random Number Generation- Universite de Montreal, Quebec-2004.

LÚCIO, VITOR - ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO – Estado Limite de Deformação – FCT – Universidade Nova de Lisboa – Maio 2006.

NUMERICAL RECIPES SOFTWARE - Numerical Recipes in Fortran : The art of scientific computing - Cambridge University Press 1992.

PROBABILISTIC MODEL CODE - JCSS - Joint Committee on Structural Safety – 2000.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S.A, VETTERLING W.T. and FLANNERY, B.P. (1992) - Numerical recipes in Fortran: The art of scientific computing, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

ROSA, E. - Notas de Aula - EMC 6501- Confiabilidade de estruturas I - UFSC – 2004.

RUSKEEPÄÄ, H. - Mathematica Navigator - Elsevier - USA– 2004.

WOLFRAM S -Mathematica Book 5th ed.-Wolfram Media-USA– 2003

WOLFRAM S. -A New Kind of Science- Wolfram Media - USA – 2002

APÊNDICE

Distribuições de probabilidades

Os problemas físicos estão associados a fatores aleatórios que podem influenciar significativamente as respostas dos sistemas e das estruturas. Por isso a utilização de modelos probabilísticos nas soluções de engenharia é frequentemente uma necessidade.

Os parâmetros dos modelos variam de um caso para o outro, mas as distribuições são geralmente identificadas. Entre as mais conhecidas estão a distribuição normal, a lognormal, binomial, Poisson, e a Exponencial. As funções básicas consideradas na análise de confiabilidade de estruturas são as funções de densidade de probabilidade, “*probability density function*”, abreviado como *PDF*, e as funções acumuladas de probabilidade, “*cumulative distribution function*”, abreviado como *CDF*.

Essas funções representam, respectivamente, a probabilidade de que a variável assuma um valor contido dentro de um intervalo pré-definido e de que a variável assuma um valor menor ou igual a um valor de referência. A representação matemática dessas funções de probabilidades é expressa por:

$$f_X(x) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (200)$$

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad (201)$$

onde X é a variável aleatória, a e b são os limites do intervalo considerado, $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade e $F_X(x)$ é a função de probabilidade acumulada.

Existem algumas grandezas que servem para descrever uma variável aleatória. Essas grandezas de medida são definidas no contexto de espaços amostrais e representam diversas propriedades importantes das distribuições. Basicamente, existem três tipos distintos de medidas: medidas de tendência central, de dispersão e de assimetria.

Essas grandezas são descritas por:

- *Média ou valor esperado*: significa o valor mais provável que a variável aleatória pode assumir no intervalo considerado:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (202)$$

- *Variância*: mede a dispersão dos valores da variável em torno da média.

$$\text{var}(X) = E((X - \mu_X)^2) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (203)$$

- *Desvio padrão*: também mede o grau de dispersão dos valores da variável em torno da média.

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (204)$$

- *Coefficiente de variação (COV)*: mede de forma adimensional a dispersão dos dados da variável aleatória em torno da média. Coeficientes de variação baixos indicam que os valores da variável aleatória estão distribuídos próximos à média, enquanto que valores altos indicam uma forte dispersão em torno da média.

$$COV = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (205)$$

Distribuição Normal

A distribuição normal ou de Gauss é, provavelmente, a distribuição mais importante na teoria da confiabilidade estrutural. Essa distribuição tem somente como parâmetros a média μ_X e o desvio padrão σ_X da variável aleatória. A função densidade de probabilidade de uma variável normal é representada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (206)$$

A função acumulada da distribuição normal só pode ser obtida por métodos numéricos ou por meio de tabelas para o caso de média nula e desvio padrão unitário. Uma alternativa equivalente e prática para representar uma variável normal é com a introdução de uma variável auxiliar conhecida como variável reduzida, definida como:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (207)$$

Ao substituir a eq.(207) na eq. (206) e considerando média nula e desvio padrão unitário obtém-se a distribuição normal padrão de probabilidades, Figura 139, dada por:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \quad (208)$$

A função de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão é avaliada por:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(z) dz \quad (209)$$

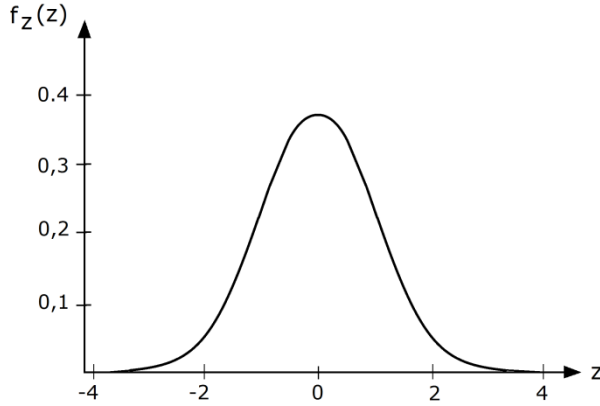


Figura 139 - Função de distribuição normal padrão $\mu_x=0$ e $\sigma_x=1$.

Distribuição Lognormal

Uma variável aleatória X tem uma distribuição Lognormal quando, estatisticamente, $\ln(X)$ pode ser representado por uma distribuição normal. A distribuição Lognormal é definida somente para valores positivos de x , Figura 140. A PDF de uma variável Lognormal é definida como:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2} \quad (210)$$

onde os parâmetros λ e ξ são respectivamente, a média e o desvio padrão da variável normal $\ln(x)$, dados por:

$$\xi^2 = \sigma_{\ln x}^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)^2 \right] \quad (211)$$

$$\lambda = \mu_{\ln x} = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (212)$$

A distribuição cumulativa Lognormal pode ser comparada com a CDF de uma variável normal, uma vez que $\ln(x)$ é normal, ou seja:

$$F_X(x) = \Phi \left(\frac{\ln(x) - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}} \right) \quad (213)$$

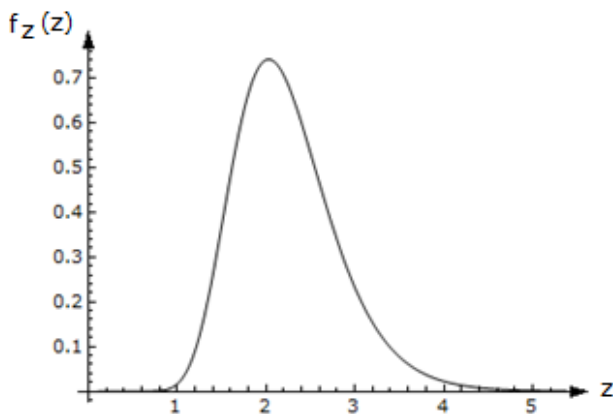


Figura 140 - Função de densidade de probabilidade de uma variável log-normal.

ANEXOS

Anexo A - Distribuições de probabilidades

Distribuições contínuas com domínio finito e semi-infinito.

Distribuição	PDF	CDF	Média	Variância
Beta[α, β]	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$	$I_x(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$
Chi[n]	$\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{x}{\sqrt{2}})^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$Q(\frac{n}{2}, 0, \frac{x^2}{2})$	$\sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$	$n - 2(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})})^2$
ChiSquare[n]	$\frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{x}{2})^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	$Q(\frac{n}{2}, 0, \frac{x}{2})$	n	$2n$
Exponencial[λ]	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma[α, λ]	$\frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}$	$Q(\alpha, 0, \frac{x}{\lambda})$	$\alpha\lambda$	$\alpha\lambda^2$
Lognormal[μ, σ]	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\frac{\log(x)-\mu}{\sqrt{2}\sigma})$	$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$	$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$
Pareto[k, α]	$\frac{\alpha}{k} (\frac{k}{x})^{\alpha+1}$	$1 - (\frac{k}{x})^\alpha$	$\frac{\alpha k}{\alpha - 1}$	$\frac{\alpha k^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$
Rayleigh[σ]	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2$
Uniforme[a, b]	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Weibull[α, λ]	$\frac{\alpha}{\lambda} (\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^\alpha}$	$1 - e^{-(\frac{x}{\lambda})^\alpha}$	$\lambda\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})$	$\lambda^2[\Gamma(\frac{\alpha+2}{\alpha}) - \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})^2]$

Distribuições contínuas com domínio infinito

Distribuição	PDF	CDF	Média	Variância
Cauchy[a, b]	$\{\pi b[1 + (\frac{x-a}{b})^2]\}^{-1}$	$\frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\frac{x-a}{b})$	-	-
ValorExtremo[α, β]	$\frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}$	$e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$	$\alpha + \gamma\beta$	$\frac{\pi^2}{6}\beta^2$
Laplace[μ, β]	$\frac{1}{2\beta} e^{-\frac{ x-\mu }{\beta}}$	$\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}(x-\mu)}{2} (1 - e^{-\frac{ x-\mu }{\beta}})$	μ	$2\beta^2$
Logistic[μ, β]	$\frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} (1 + e^{-\frac{x-\mu}{\beta}})^{-2}$	$(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\beta}})^{-1}$	μ	$\frac{\pi^2}{3}\beta^2$
Normal[μ, σ]	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma})$	μ	σ^2
StudentT[n]	$\frac{1}{\sqrt{nB(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})}} (\frac{n}{n+x^2})^{\frac{n+1}{2}}$	$\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2} I_{(\frac{n}{n+x^2}, 1)}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$	0	$\frac{n}{n-2}$

Anexo B - Tabela da distribuição normal padrão

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0.	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	0.1
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	0.2
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517	0.3
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	0.4
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224	0.5
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	0.6
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	0.7
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389	0.9
1.	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	1.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883	1.1
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015	1.2
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	1.3
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	1.4
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	1.5
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	1.6
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	1.7
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	1.8
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767	1.9
2.	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	2.
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857	2.1
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989	2.2
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	2.3
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	2.4
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	2.5
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	2.6
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	2.7

2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981	2.8
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	2.9
3.	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999	3.
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	3.1
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	3.2
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	3.3
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	3.4
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	3.5
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.6
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.7
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	3.8
3.9	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	3.9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Anexo C - Coeficiente de ajuste da idade do concreto (χ).

Tabela 58 - Coeficiente de ajuste da idade do concreto (χ). (Fonte: ACI 209R-92, 1997)

t-t _{ia} (dias)	$\varphi_{f\infty}$	t ₀ (dias)			
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴
10 ¹	0,5	0,525	0,804	0,811	0,809
	11,5	0,728	0,826	0,825	0,820
	22,5	0,774	0,842	0,837	0,830
	33,5	0,806	0,856	0,848	0,839
10 ²	0.5	0,505	0,888	0,916	0,915
	1.5	0,739	0,919	0,932	0,928
	2.5	0,804	0,935	0,943	0,938
	3.5	0,839	0,946	0,951	0,946
10 ³	0.5	0,511	0,912	0,973	0,981
	1.5	0,732	0,943	0,981	0,985
	2.5	0,795	0,956	0,985	0,988
	3.5	0,830	0,964	0,987	0,990
10 ⁴	0.5	0,501	0,899	0,976	0,994
	1.5	0,717	0,934	0,983	0,995
	2.5	0,781	0,949	0,986	0,996
	3,5	0,818	0,958	0,989	0,997

Anexo D - Umidade relativa do ambiente no Brasil

Tabela 59 - Umidades relativas médias (%) em diferentes cidades da região Sul do Brasil. Fonte: Jankowsky *et al.* (1986)

Cidades	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
Vacaria (RS)	78,0	80,0	82,0	81,0	83,0	83,0	82,0	80,0	78,0	77,0	75,0	74,0
S. Francisco de Paula (RS)	82,8	85,2	85,6	86,3	86,2	85,6	83,3	81,6	83,9	83,9	81,8	84,0
Florianópolis (SC)	82,5	83,4	83,1	82,5	84,3	85,0	84,4	84,2	83,9	82,9	80,9	80,6
Lages (SC)	77,2	80,5	80,1	82,2	83,4	83,6	82,0	80,0	80,2	79,3	75,5	73,6
Guarapuava (PR)	78,7	80,2	80,0	79,9	80,1	79,4	74,9	70,1	74,0	74,8	73,4	74,9
Palmas (PR)	77,8	80,3	80,9	83,2	85,1	85,9	83,1	78,6	81,7	80,2	77,3	76,3
Ponta Grossa (PR)	78,1	80,6	80,2	80,1	80,4	80,5	76,7	72,6	75,2	76,2	74,4	75,3
Quedas do Iguaçu (PR)	72,2	75,3	75,3	74,4	77,1	78,8	72,6	70,6	69,2	69,8	71,9	72,9

Valor médio da tabela: 79,4 %

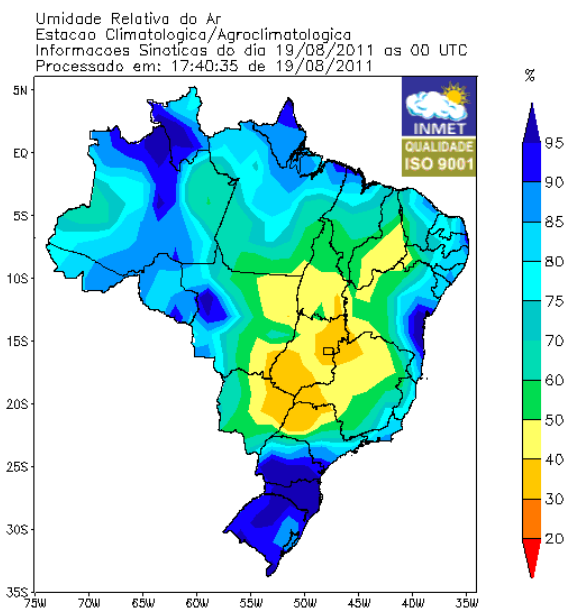


Figura 141 - Mapas de condições registradas, Umidade Relativa do Ar, as 00 UTC. Fonte: Instituto Nacional de Meteorologia, INMET (2011).

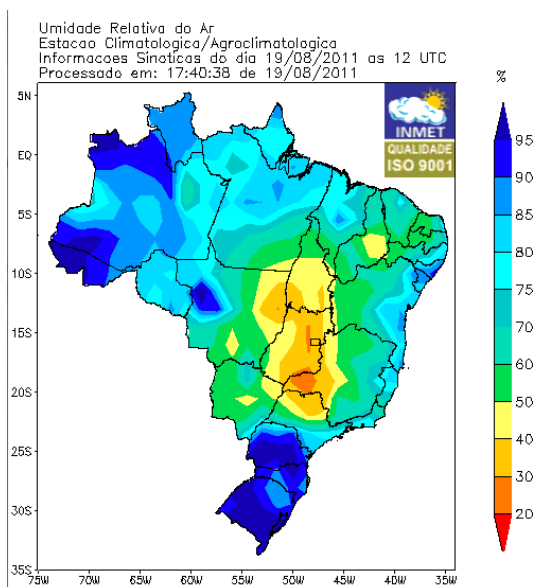


Figura 142 - Mapas de condições registradas, Umidade Relativa do Ar as 12 UTC. Fonte: Instituto Nacional de Meteorologia, INMET (2011).

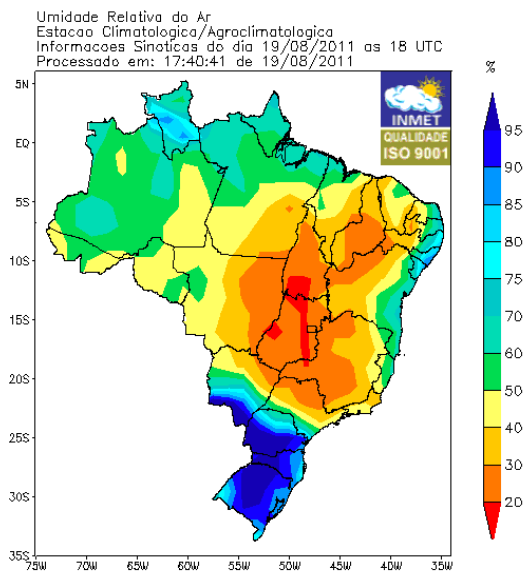


Figura 143 - Mapas de condições registradas, Umidade Relativa do Ar as 18 UTC. Fonte: Instituto Nacional de Meteorologia, INMET (2011).

Anexo E - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5.Tabela 60 - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5 dimensionada para $f_{ck}^1 = 20 \text{ MPa}$

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	26,5 MPa	0.176	Normal
f_{ctm}	2,27 MPa	0.218	Normal
E_{ci}	25520 MPa	0.119	Normal
A_{s2}	0,99*3,14 cm ²	0,024	Normal truncada
A_{s1}	0,99*0,38 cm ²	0.024	Normal truncada
d'	3,5 cm	0.045	Normal
G^1	1,05. 1,2 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,3. 1,5kN/m ²	0,60	Gamma

1- Resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias

Tabela 61 - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5 dimensionada para $f_{ck}^1 = 30 \text{ MPa}$

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	39,5 MPa	0.176	Normal
f_{ctm}	2,9 MPa	0.218	Normal
E_{ci}	30672 MPa	0.119	Normal
A_{s2}	0,99*4,91 cm ²	0,024	Normal truncada
A_{s1}	0,99*0,38 cm ²	0.024	Normal truncada
d'	3,5 cm	0.045	Normal
G^1	1,05. 1,2 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,3. 1,5kN/m ²	0,60	Gamma

1- Resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias

Tabela 62 - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5 dimensionada para $f_{ck}^1 = 35 \text{ MPa}$

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	45,7 MPa	0.176	Normal
f_{ctm}	3,28 MPa	0.218	Normal
E_{ci}	33660 MPa	0.119	Normal
A_{s2}	0,99*4,91 cm ²	0,024	Normal truncada
A_{s1}	0,99*0,38 cm ²	0.024	Normal truncada
d'	3,5 cm	0.045	Normal
G^1	1,05. 1,2 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,3. 1,5kN/m ²	0,60	Gamma

1- Resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias

Tabela 63 - Variáveis aleatórias da viga VR1750S5 dimensionada para $f_{ck}^1 = 40 \text{ MPa}$

Variável	Média μ	COV	PDF
f_{cm}	51,3 MPa	0.176	Normal
f_{ctm}	3,54 MPa	0.218	Normal
E_{ci}	35660 MPa	0.119	Normal
A_{s2}	0,99*4,91 cm ²	0,024	Normal truncada
A_{s1}	0,99*0,38 cm ²	0.024	Normal truncada
d'	3,5 cm	0.045	Normal
G^1	1,05. 1,2 kN/m ²	0,10	Normal
Q^2	0,3. 1,5kN/m ²	0,60	Gamma

1- Resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias